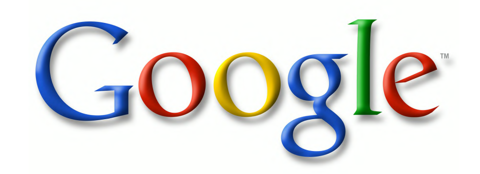
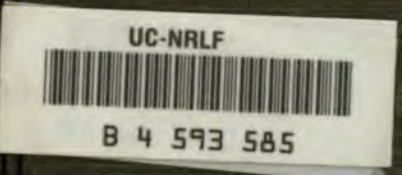





F. KLEIN UND A. SOMMERFELD

ÜBER DIE

# THEORIE DES KREISELS

III

# P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen, der Technischen und Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

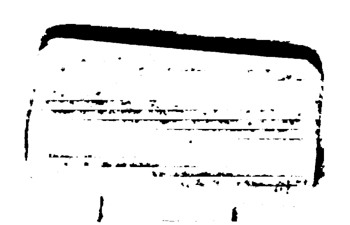
Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen wird. Eine **französische Ausgabe,** von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

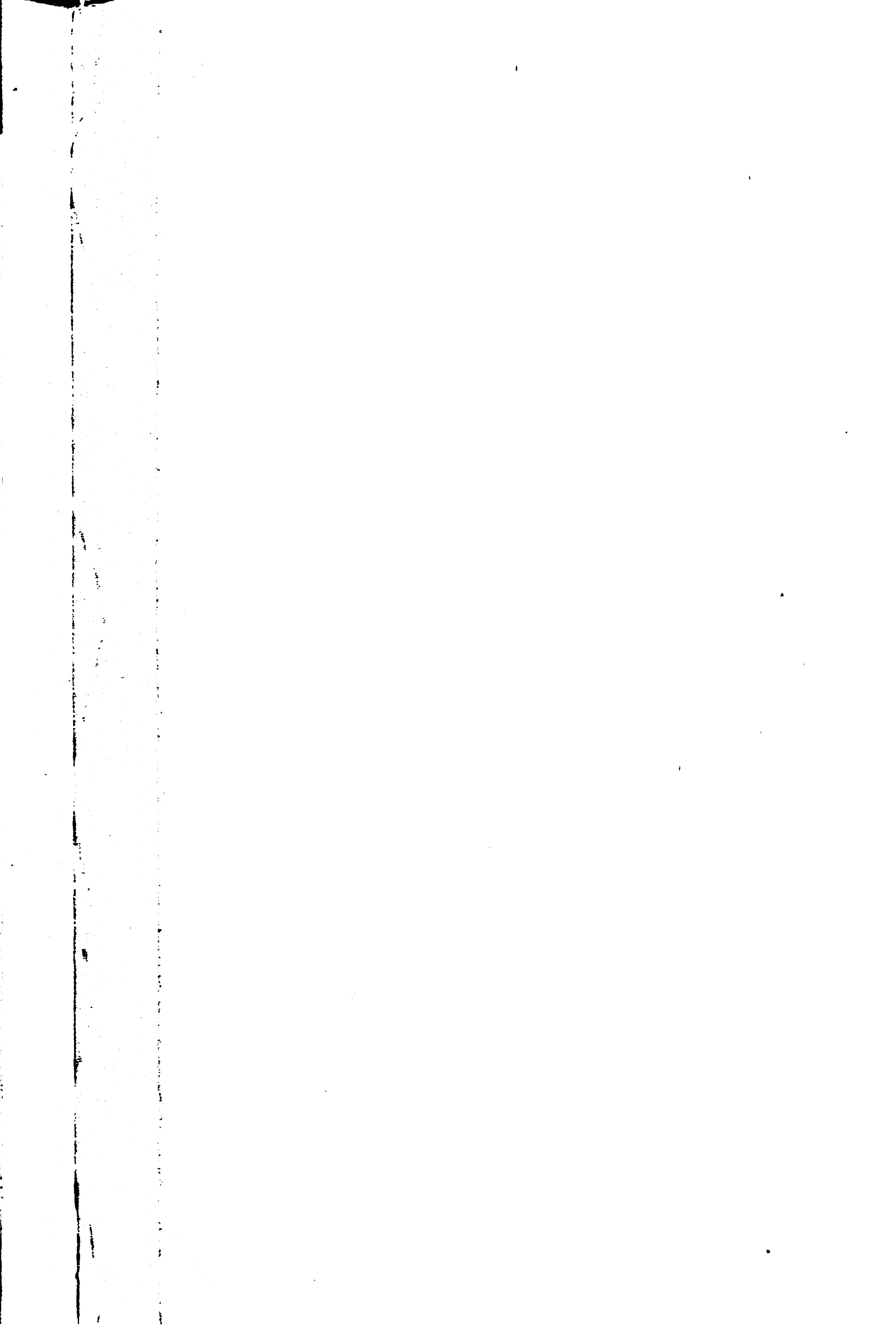
Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen,** die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik,** die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,** die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht,** die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter,** ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

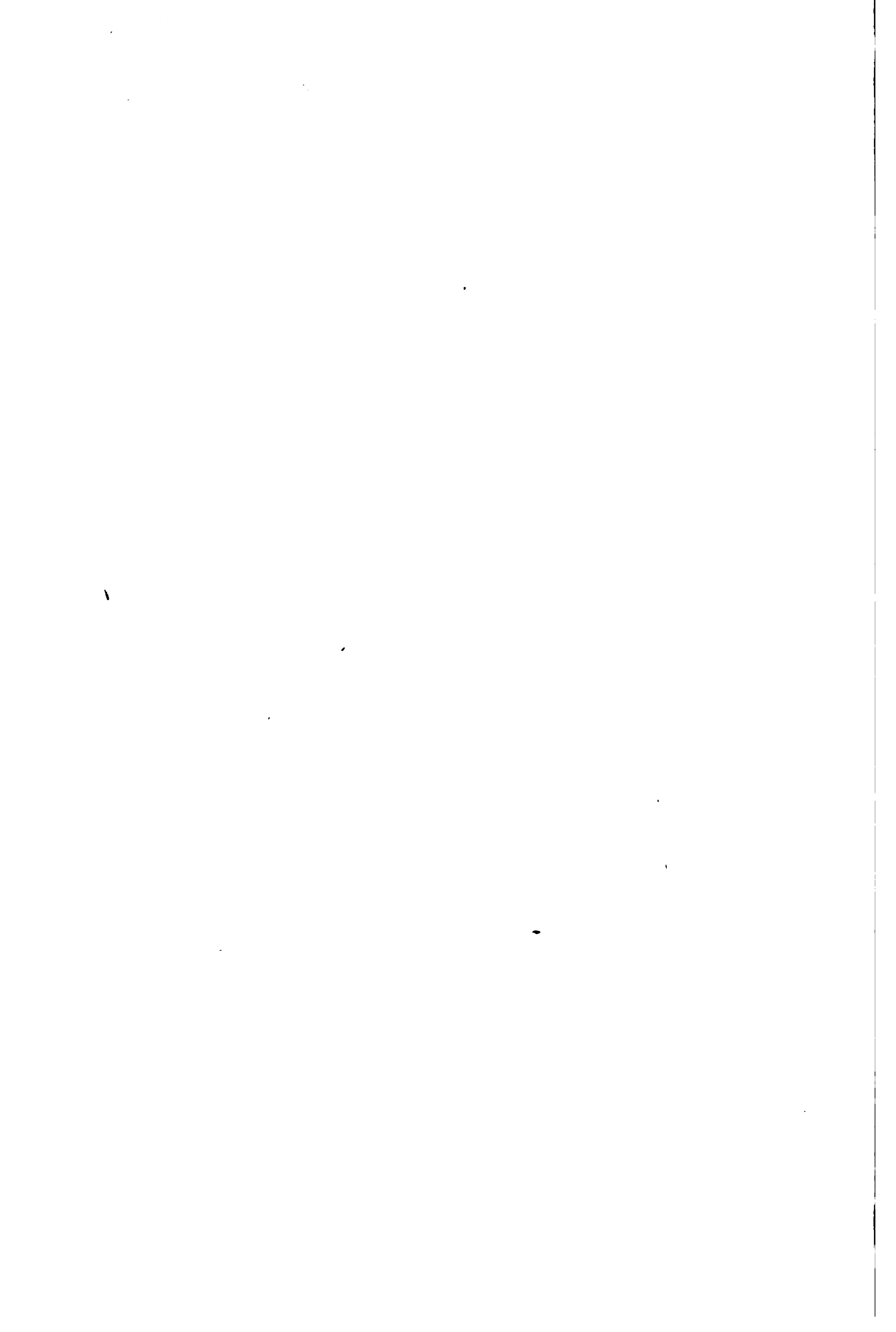
Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die unentgeltlich in 30000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten,** 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

**B. G. Teubner.**







F. KLEIN UND A. SOMMERFELD,

ÜBER DIE

# THEORIE DES KREISELS.

---

HEFT III.

DIE STÖRENDEN EINFLÜSSE.
ASTRONOMISCHE UND GEOPHYSIKALISCHE ANWENDUNGEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1903.

# Anzeige von Heft III der Kreiseltheorie.

Nach längerer Pause, welche durch meinen Übergang in ein neues Lehramt bedingt wurde, folgt auf das zweite Heft der Theorie des Kreisels (erschienen 1898) nunmehr ein drittes Heft. Dasselbe bildet nicht, wie es beabsichtigt war, den Schluß des Werkes; es zeigte sich nämlich, daß sich der Stoff außerordentlich dehnte, sobald das allgemeine mathematische Schema der Theorie, gemäß dem ursprünglichen Plane des Werkes, auf die besonderen Bedingungen des Versuches oder auf die mannigfachen Fragestellungen der verschiedenen an der Kreiseltheorie interessierten Spezialwissenschaften angewandt wurde. Deshalb sind in diesem Hefte von den Anwendungen der Kreiseltheorie nur diejenigen auf Astronomie und Geophysik zur Darstellung gekommen; die technischen und physikalischen Anwendungen verbleiben für ein viertes (letztes) Heft.

Während sich der Beginn der vorliegenden Lieferung inhaltlich an die vorangehenden Kapitel anlehnt und in einem Nachtrag zu Kap. VI den auf der Horizontalebene spielenden Kreisel behandelt (durch Näherungsrechnungen mit strenger Fehlerabschätzung), geht der Inhalt des Kapitels VII wesentlich über den Kreis derjenigen Probleme hinaus, welche in der analytischen Mechanik idealer Mechanismen behandelt zu werden pflegen. Hier werden die allgemeinen Erfahrungen über die Wirkung der Reibungseinflüsse dargestellt und im Anschlusse daran die Reibung im Stützpunkte des Kreisels und deren Wirkung, das Aufrichten der Kreiselaxe, ausführlich diskutiert. Da einerseits die erfahrungsmäßigen Grundlagen für den Ansatz der Reibungsprobleme nicht sehr sicher sind, da andrerseits die mathematischen Schwierigkeiten bei der strengen Durchführung des Ansatzes sehr groß sein würden, so wird die Behandlung zum Teil auf graphischem Wege, mit Zuhilfenahme von Vernachlässigungen und Näherungsmethoden durchgeführt, wie solche bereits an früheren Stellen der Kreiseltheorie wiederholt empfohlen wurden. Die Schärfe dieser Methoden reicht völlig aus, sofern man als eigentliches Ziel im Auge behält: von den in der Wirklichkeit zu beobachtenden Erscheinungen ein klares qualitatives und ein innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtungen genaues quantitatives Bild zu entwerfen. Neben der Reibung im Stützpunkte werden als

weitere, die ideale Kreiselbewegung entstellende Ursachen der Luftwiderstand, die Elastizität des Kreiselmaterials und der Unterlage berücksichtigt. Hierbei waren zum Teil bereits die Rücksichten auf spätere Anwendungen maßgebend, zum Teil sollten diese Untersuchungen als ein Beispiel zur Mechanik der wirklichen Erscheinungen oder, wie es hier gelegentlich ausgedrückt wird, zur irdischen Mechanik dienen (im Gegensatz zur himmlischen Mechanik, in welcher die hier behandelten Einflüsse meist nicht in Betracht kommen, oder zur reinen analytischen Mechanik, in welcher solche Einflüsse zu Gunsten der Eleganz der mathematischen Entwickelung gewöhnlich vernachlässigt werden). In einem Nachtrag zu diesem Kapitel wird sodann, unter Hinzuziehung von Beobachtungsmaterial, die Behandlung des auf der Ebene spielenden Kreisels mit Rücksicht auf die Reibung ergänzt.

Kapitel VIII behandelt in einem ersten Abschnitt die astronomischen Anwendungen der Kreiseltheorie, in einem zweiten die geophysikalischen.

In den klassischen Problemen der Präcession und der durch die Mondbewegung erzwungenen Nutation konnten füglich neue Ergebnisse nicht beigebracht werden. Der Gegenstand ist von altersher so erschöpfend behandelt worden, daß die vorliegende Darstellung lediglich darauf hinzuzielen hatte, die für den Nichtfachmann nicht immer durchsichtige Darstellungsweise der Astronomen durch ein anschaulicheres Verfahren zu ersetzen. Das Mittel hierzu bot eine Methode von Gauß zur Störungsrechnung, welche hier nach verschiedenen Richtungen ausgebaut wird.

Im Gegensatz hierzu sind die in dem geophysikalischen Abschnitt untersuchten Probleme zum Teil jüngsten Datums. Es handelt sich hier namentlich um die freien Nutationen der Erdaxe, deren Periode von Chandler festgestellt wurde, und weiter um die Erscheinung der Polschwankungen überhaupt. Sowohl in der Darstellung des objektiven Sachverhaltes wie in der Erklärung desselben dürfte die hier gebotene Behandlung entschiedene Fortschritte aufweisen. Wegen der grundlegenden Wichtigkeit der Frage wurden bei der Erklärung der vierzehnmonatlichen Chandlerschen Periode auch die erforderlichen Hilfssätze aus der Hydrodynamik und der Elastizitätstheorie aufgenommen und auf vereinfachtem Wege bewiesen. Ferner wurde zur Erklärung der jährlichen Periode der Polschwankungen die Theorie der meteorologischen Massentransporte entwickelt, wobei sich abermals die in den früheren Heften betonte Impulstheorie und die freiere, begriffliche Auffassung der dynamischen Differentialgleichungen als besonders fruchtbar erwies. Den Schluß des geophysikalischen Abschnittes bildet die

Besprechung der berühmten Foucaultschen Kreiselversuche zum Nachweis der Erdrotation. Hier kam es einerseits darauf an, unnötige mathematische Schwierigkeiten auszuschalten, welche in den älteren Darstellungen der Foucaultschen Versuche einen breiten Raum einnehmen, andererseits die störenden Einflüsse hervorzukehren und ihrer Größenordnung nach abzuschätzen.

Auf Wunsch meines hochverehrten Lehrers F. Klein habe ich schließlich darauf hinzuweisen, daß ich bei der Abfassung dieses Heftes noch in weit höherem Grade wie bei den vorangehenden Heften über den Inhalt der ursprünglichen, von Herrn Klein gehaltenen Universitäts vorlesung hinausgegangen bin. Die in Kapitel VII gegebenen Ausführungen zur Mechanik der störenden Einflüsse waren in jener Vorlesung nur in allgemeinen Umrissen postuliert worden; die hierzu erforderlichen Integrations- und Näherungsmethoden (auch in dem Nachtrag zu Kap. VI) sowie alle Einzelresultate rühren von mir allein her. Was die astronomischen Anwendungen betrifft, so erkannte Herr Klein die Vorzüge des Gaußischen Verfahrens, nach welchem er in jener Vorlesung insbesondere das Präcessionsproblem behandelte; die Anwendung desselben Verfahrens auf das Problem der Nutationen sowie alles Zahlenmäßige habe ich dagegen von mir aus hinzugefügt. Von dem Problem der Polschwankungen war in jener Vorlesung überhaupt nicht die Rede, sodaß die hier gebotenen etwaigen Fortschritte (Kap. VIII § 6—8) als mein Eigentum zu betrachten sind. Für die Auffassung der Foucaultschen Versuche waren die Grundlinien bereits von Herrn Klein vorgezeichnet.

Im übrigen betone ich gern, daß mir das fortgesetzte Interesse, welches Herr Klein an der Weiterführung des Werkes genommen hat, sowie die mancherlei Anregungen, die er mir bei Vorbesprechungen und bei der Korrektur zukommen ließ, meine eigene Arbeit wesentlich erleichtert haben. Ferner habe ich den Herren Schwarzschild und Wiechert zu danken für viele wertvolle Nachweise und Berichtigungen zu den astronomischen und geophysikalischen Gegenständen.

Möge das vorliegende Heft nicht nur dem Mathematiker und Physiker von Nutzen sein, der die Mechanik um ihrer selbst willen treibt und an der Hand des hier so eingehend ausgeführten Beispiels zu einem tieferen und lebendigeren Verständnis der Wissenschaft vordringen will, sondern möge dieses sowie das folgende Heft auch von den Vertretern der Astronomie, der Geophysik und der Technik gern zu Rate gezogen werden, so oft dieselben auf ihrem besonderen Gebiete mit der Theorie der Kreiselwirkungen in Berührung kommen!

Aachen, im Juli 1903. **A. Sommerfeld.**

## Anhang zu Kapitel VI.

### § 10. Der auf der Horizontalebene spielende Kreisel.

Als Gegenstück zur Theorie des Kreisels mit festem Stützpunkte soll die Bewegung des Kreisels mit horizontal beweglichem Stützpunkte anhangsweise behandelt werden, also diejenige Bewegung, an welche Erwachsene und Kinder in erster Linie bei dem Worte „Kreiselbewegung" denken. Wir beabsichtigen hierbei in analytischer Hinsicht lange nicht so weit zu gehen, wie bei dem vorigen Probleme, sondern werden zufrieden sein, wenn wir ein klares Bild von dem qualitativen Charakter der Bewegung entwerfen können. Dies gelingt, mit Umgehung aller analytischen Schwierigkeiten, welche sonst auftreten würden, wenn wir *mit begrenzter Genauigkeit* rechnen, wie solches im Kap. IV, § 9 empfohlen wurde. Wollen wir die Bewegung nur mit derjenigen Schärfe feststellen, wie sie etwa die mit blofsem Auge angestellte Beobachtung eines gewöhnlichen Kreisel-Spielzeugs, ohne besondere Verfeinerung der Beobachtungsmittel und ohne sorgsame Ausschaltung von Störungsursachen liefert, so können wir uns sogar mit einer recht geringen Genauigkeit begnügen. Vom mathematischen Standpunkte ist offenbar auch eine grobe Näherung logisch befriedigend, *sofern wir den bei unserer Rechnung zugelassenen Fehler abschätzen können.* Auf diesen Punkt werden wir im Folgenden besonderen Wert legen. Dagegen würde es uns, bei Zugrundelegung des soeben genannten Mafsstabes für die anzustrebende Genauigkeit, wertlos scheinen, durch Heranziehung höherer analytischer Hülfsmittel den Genauigkeitsgrad der Rechnung weiter zu verfeinern.

Von der den Kreisel tragenden Ebene werden wir voraussetzen, dafs sie *vollkommen glatt*, also reibungslos sei, da wir auf die Wirkung der Reibung im nächsten Kapitel zurückkommen. Der Gegendruck der Ebene, die Reaktion $R$ derselben gegen den Kreisel, ist dann senkrecht gegen die Ebene, also vertikal gerichtet. Da der Stützpunkt $O$ nicht mehr so sehr wie bei dem früheren Problem ein geometrisch ausgezeichneter Punkt ist, werden wir nicht diesen, sondern den mechanisch ausgezeichneten Schwerpunkt $S$ zum Bezugspunkte im

Sinne von Kap. II, § 2 wählen. Die Verbindungslinie $OS$ heifst wie früher die Figurenaxe, ihr Winkel gegen die Vertikale $\vartheta$. Die Entfernung $OS$ werde mit $E$, die Gesamtmasse des Kreisels mit $M$ bezeichnet. Es werde abkürzend $P = MgE$ gesetzt, so dafs $P$ wie früher das Moment der Schwere um die zur Figurenaxe senkrechte horizontale Axe durch $O$ bei horizontaler Lage der Figurenaxe bedeutet. Wir nehmen, worin keine wesentliche Spezialisierung liegt, der Kürze wegen an, dafs das für den Schwerpunkt konstruierte Trägheitsellipsoid eine *Kugel* sei; der allen Axen durch $S$ gemeinsame Wert des Trägheitsmomentes heifse $A$.

Als äufsere Kräfte kommen, da wir die Reibung vernachlässigen, nur die Schwere $Mg$ und der Gegendruck $R$ in Betracht, dessen Gröfse sich aus dem Folgenden ergeben wird. Das Potential der Schwere ist (bis auf eine willkürliche Konstante)

$$V = Mgz = P\cos\vartheta, \tag{1}$$

wo $z = E\cos\vartheta$ die vertikale Koordinate des Schwerpunktes in dem in Figur 68 angedeuteten festen Koordinatensystem ist. Dagegen liefert der Gegendruck $R$ zur potentiellen Energie keinen Beitrag, da er keine Arbeit leistet, sondern senkrecht gegen die Bewegung seines Angriffspunktes gerichtet ist. Andrerseits liefert die Schwere in unserem Bezugspunkte $S$ kein Drehmoment, während der Gegendruck zu einem Drehmomente Anlafs giebt, welches die „Knotenlinie" zur Axe hat, also diejenige Linie, welche sowohl auf der Vertikalen wie auf der Figurenaxe senkrecht steht.

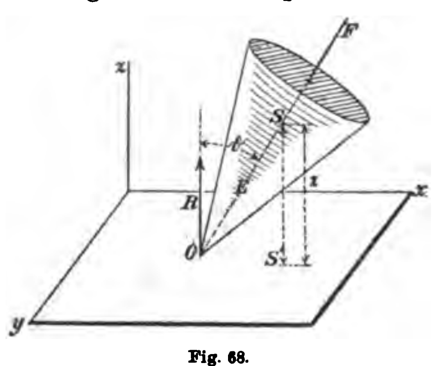


Fig. 68.

Wir fassen wie üblich die äufseren Kräfte zu einer *Einzelkraft* und einer *Drehkraft* (Kräftepaar) hinsichtlich des Bezugspunktes $S$ zusammen. Nach dem eben Gesagten *ist die Einzelkraft beständig vertikal gerichtet und gleich $R - Mg$. Die Axe der Drehkraft liegt dauernd horizontal und senkrecht zur Figurenaxe; der Gröfse nach ist sie gleich dem Momente von $R$ um $S$.*

Die wichtigsten Aufschlüsse über den Verlauf der Bewegung liefert uns hier wie überall unser Impulssatz aus Kap. II, § 5, welcher uns in anschaulicher Weise die Schwerpunkts- und Flächensätze zusammenfafst. Der Impuls zerlegt sich hier ebenfalls in zwei Bestandteile, den *Einzelimpuls* (oder Schiebestofs) und den *Drehimpuls* (oder Drehstofs).

Die Komponenten des ersteren nach den im Raume festen Koordinatenaxen $x, y, z$ werden wie früher mit $[X], [Y], [Z]$, die Komponenten des letzteren mit $l, m, n$ bezeichnet. Wir werden auch die Komponenten $L, M, N$ des Drehimpulses nach einem im Kreisel festen Koordinatensystem nötig haben, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt und dessen $Z$-Axe die Figurenaxe ist.

Nach dem angezogenen Impulssatze ist nun die Änderungsgeschwindigkeit jeder Komponente des Einzelimpulses und des Drehimpulses gleich dem augenblicklichen Werte der entsprechenden Komponente der Einzelkraft und Drehkraft. Aus dem, was wir über Richtung und Axe dieser letzteren bemerkten, folgt aber, *daſs die Horizontalkomponenten des Einzelimpulses und die Vertikalkomponente des Drehimpulses während der Bewegung konstant bleiben; die äuſseren Kräfte beeinflussen nur die Vertikalkomponente des Schiebestoſses und die Horizontalkomponenten des Drehstoſses.*

In Zeichen heiſst dieses

$$[X] = \text{const.}, \quad [Y] = \text{const.}, \quad n = \text{const.} \tag{2}$$

Da nach pag. 102 $[X]$, $[Y]$ und $[Z]$ den betreffenden Schwerpunktsgeschwindigkeiten proportional sind ($[X] = Mx'$ etc.), so sagen die beiden ersten Gleichungen (2) aus, daſs die Horizontalprojektion des Schwerpunktes eine gerade Linie mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft. Natürlich steht und fällt dieses Resultat mit der Annahme, daſs im Stützpunkt keine Reibung auftrete.

Nehmen wir den Impulssatz für die dritte Komponente des Schiebestoſses (bez. den entsprechenden Schwerpunktssatz) hinzu, so erhalten wir:

$$\frac{d[Z]}{dt} = R - Mg.$$

Diese Gleichung können wir als *Bestimmungsgleichung der Reaktionskraft* auffassen; indem wir für $[Z]$ den Wert $Mz'$ eintragen, ergiebt sich

$$R = Mz'' + Mg. \tag{3}$$

Auſser der Gleichung $n = \text{const.}$ besteht auch hier die Gleichung

$$N = \text{const.}, \tag{4}$$

wie wir aus dem „modifizierten Impulssatze“ IIb von pag. 145 schlieſsen. Nach diesem Satze ist nämlich die Änderungsgeschwindigkeit des Drehstoſses *relativ zum Körper* nach Axe und Gröſse gleich dem Drehmoment der äuſseren Kräfte vermehrt um die resultierende centrifugale Drehkraft (vgl. pag. 144). Letztere verschwindet beim Kugelkreisel schlechtweg, die Axe des ersteren steht nicht nur auf der Vertikalen,

sondern auch auf der Figurenaxe senkrecht. Infolgedessen ist die Änderungsgeschwindigkeit der Drehstofskomponente $N$ nach der Figurenaxe gleich Null und diese Komponente selbst konstant.

Endlich nehmen wir noch den Satz der lebendigen Kraft $T+V=h$ hinzu. $T$ setzt sich hier aus zwei Teilen zusammen, aus der lebendigen Kraft der Drehbewegung $T_1$ und aus der der fortschreitenden Bewegung $T_2$. Die letztere drückt sich durch die Schwerpunktsgeschwindigkeiten aus und ist

$$T_2 = \frac{M}{2}(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Wir führen, wie beim Kreisel mit festem Punkte, die Abkürzung

$$\cos\vartheta = u \tag{5}$$

ein und haben nach Figur 68

$$z = Eu, \quad z' = Eu'.$$

Bedenken wir noch, dafs die Geschwindigkeitskomponenten $x'$ und $y'$ Konstante sind, so können wir die beiden ersten Glieder von $T_2$ mit der Konstanten $h$ vereinigt denken und diese Glieder unterdrücken. Wir schreiben daher einfacher

$$T_2 = \frac{ME^2}{2}u'^2.$$

Die lebendige Kraft der Drehbewegung $T_1$ unterscheidet sich in nichts von der lebendigen Kraft des Kreisels mit festem Stützpunkte. Der Ausdruck derselben durch die Gröfse $u=\cos\vartheta$ wurde bereits pag. 222 entwickelt. Er lautet, für den Kugelkreisel spezialisiert:

$$T_1 = \frac{A}{2}\left\{\frac{u'^2}{1-u^2}+\frac{(Nu-n)^2}{A^2(1-u^2)}+\frac{N^2}{A^2}\right\}.$$

Indem wir noch für $V$ den Ausdruck (1) $V=Pu$ benutzen, schreiben wir die Gleichung der lebendigen Kraft folgendermafsen:

$$\frac{A}{2}\left\{\frac{u'^2}{1-u^2}+\frac{(Nu-n)^2}{A^2(1-u^2)}+\frac{N^2}{A^2}\right\}+\frac{M}{2}E^2u'^2+Pu=h. \tag{6}$$

Da nach (2) und (4) $n$ und $N$ Konstante sind, liefert uns die vorstehende Gleichung eine Beziehung zwischen $u$ und $u'$ bez. zwischen $u$ und $t$, aus welcher die wechselnden Neigungen der Figurenaxe gegen die Vertikale als Funktion der Zeit entnommen werden können. Wir rechnen, indem wir auf gleichen Nenner bringen, zunächst $u'^2$ aus und erhalten $u'^2=U$, mit Einführung der Abkürzung $U$

$$U = \frac{2Ah(1-u^2)-2APu(1-u^2)+2nNu-N^2-n^2}{A^2+Aa(1-u^2)}; \tag{7}$$

$a=ME^2$ bedeutet dabei das Trägheitsmoment der im Schwerpunkte

konzentriert gedachten Gesamtmasse $M$ um eine zur Figurenaxe senkrechte Gerade durch $O$. Es folgt nun:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \sqrt{U} \quad \text{oder} \quad dt = \dfrac{du}{\sqrt{U}}, \\ t = \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{U}}. \end{cases}$$

Wir wollen sogleich eine entsprechende Darstellung für den Winkel $\psi$ geben, den die Knotenlinie des Kreisels mit einer beliebigen festen horizontalen Geraden bildet. (Den dritten Eulerschen Winkel $\varphi$ werden wir im Folgenden nicht explizit nötig haben.) $\psi$ bestimmt sich nach pag. 222 Gleichung (4) aus:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta},$$

also wenn wir wie vorher $\cos\vartheta = u$ setzen, aus

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{n - Nu}{A(1 - u^2)}.$$

Wir integrieren, indem wir $dt$ nach Gl. (8) durch $du$ ausdrücken und erhalten:

$$(8')\qquad \psi = \int \frac{n - Nu}{A(1 - u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Die in den Gleichungen (8) und (8′) gegebene Integraldarstellung der Bewegung, die schon von Poisson*) herrührt, vergleichen wir zunächst mit der entsprechenden Darstellung, die früher (pag. 223) für den Kreisel mit festem Punkte entwickelt wurde. Es zeigt sich dabei einerseits eine grofse Analogie der Formeln, wir bemerken aber andrerseits, dafs der Ausdruck von $U$ jetzt etwas komplizierter ist wie früher.

Während der frühere Ausdruck $U$ drei Nullstellen und eine Unendlichkeitsstelle besafs, hat unser jetziges $U$ drei Nullstellen (diejenigen Werte von $u$, für die der Zähler verschwindet) und drei Unendlichkeitsstellen (nämlich den Wert $u = \infty$ und die Werte, für die der Nenner verschwindet).

Aus der Analogie der jetzigen und der früheren Formeln folgt unmittelbar, dafs ein Teil unserer früheren Resultate ungeändert bestehen bleibt. So können wir z. B. den Beweis für die „Periodizitätseigenschaften der Bewegung", von denen früher die Rede war, auf den vorliegenden Fall unmittelbar übertragen, indem wir die Schlüsse von Kap. IV, § 4 wörtlich wiederholen. Es ändert sich also $t$ und $\psi$ je um einen bestimmten Zuwachs, nämlich um eine sog. „Periode", wäh-

*) Vgl. Poisson, Traité de Mécanique II, Nr. 434 ff.

rend die Integrationsvariable $u$ zwischen denjenigen beiden Wurzelwerten $e_0$ und $e_1$ von $U$ hin- und hergeführt wird, die im Intervalle $-1$ und $+1$ liegen.

Diese Periodizität tritt besonders deutlich in der Bahnkurve hervor, die der Stützpunkt auf der tragenden Horizontalebene beschreibt und die jetzt passend an die Stelle der in Kap. IV betrachteten Bahnkurven tritt. Wir können ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, daſs die Projektion $S'$ des Schwerpunktes $S$ auf die Horizontalebene festliegt, daſs also die horizontale konstante Schwerpunktsgeschwindigkeit im besonderen den Wert Null hat. (Im anderen Falle brauchten wir in der Horizontalebene nur statt eines festen ein mit der horizontalen Schwerpunktsgeschwindigkeit gleichförmig fortschreitendes Axenkreuz zu Grunde zu legen; die im folgenden zu zeichnende Figur würde dabei in Richtung dieser Geschwindigkeit in leicht ersichtlicher Weise auseinandergezogen werden.) Unter dieser Annahme wandert der Schwerpunkt auf der festen im Punkte $S'$ errichteten Vertikalen auf und ab und die Bahnkurve zieht sich zwischen zwei konzentrischen, um den Punkt $S'$ beschriebenen Kreisen hin und her, die den beiden Neigungen $\cos\vartheta = e_0$ und $\cos\vartheta = e_1$ der Figurenaxe entsprechen. Aus den genannten Periodizitätseigenschaften folgt dann, daſs die aufeinander folgenden Bögen der Bahnkurve zwischen den beiden Kreisen $e_0$ und $e_1$ wechselweise symmetrisch und kongruent verlaufen. Zur qualitativen Veranschaulichung der Bahnkurve können direkt die früheren Figuren aus Kap. IV, § 1 und 2 in sinngemäſser Modifikation dienen; für einen besonderen und besonders wichtigen Fall werden wir die Bahnkurve im Folgenden genauer berechnen und die soeben angedeuteten Überlegungen im Einzelnen durchführen.

Andererseits würde die verschiedene Bauart unseres $U$ im jetzigen und früheren Falle auch manche Unterschiede in der weiteren analytischen Behandlung mit sich bringen. Man bezeichnet die Integrale in (8) und (8'), da sie um einen Grad komplizierter sind wie die früheren elliptischen Integrale, als *hyperelliptische.* Der Unterschied beider zeigt sich besonders im komplexen Gebiete, wenn wir versuchen wollten, unsere Gröſsen $u$ und $\psi$ als Funktionen der Zeit für alle (auch die komplexen) Werte von $t$ darzustellen*). Es ist aber nicht unsere Absicht, auf die hierbei auftretenden Schwierigkeiten irgendwie

*) $u$ und $\psi$ sind im Komplexen nicht mehr eindeutige Funktionen von $t$, wohl aber lassen sich, wie man in der Theorie der sog. automorphen Funktionen zeigt, $u$, $\psi$ und $t$ für den ganzen komplexen Wertebereich durch eine Hülfsvariable eindeutig darstellen. Vgl. hierzu F. Klein: The mathematical theory of the Top. Princeton Lectures. New York 1897, insbes. den letzten Abschnitt.

einzugehen. Für die numerische Beherrschung der Kreiselbewegung im Reellen, die doch allein unser Zweck sein kann, würde bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie auf diesem Wege nichts gewonnen werden. Eher würde sich hierfür ein Verfahren empfehlen, welches Weierstrafs*) in allgemeinen Zügen für alle ähnlichen Probleme entworfen hat und welches darauf abzielt, $u$ als Funktion von $t$ durch eine trigonometrische Reihe mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Indessen können wir auch von den hierdurch bedingten, immerhin ziemlich umständlichen Rechnungen absehen, da wir uns, wie oben begründet wurde, mit einer geringen Genauigkeit begnügen werden.

Speziell werden wir uns für das Analogon der früher behandelten *pseudoregulären Präcession* interessieren, weil diese durch die gewöhnlichen Antriebsvorrichtungen in der Regel realisiert wird. Wir wollen also voraussetzen, dafs der Eigenimpuls $N$ „sehr grofs sei". Dies soll (vgl. pag. 293) bedeuten, dafs das Quadrat von $N$ grofs sei gegenüber der gleichbenannten Gröfse $AP$. Z. B. können wir voraussetzen:

$$N^2 > 100\,AP.$$

Ferner wollen wir etwa annehmen, dafs der Kreisel zu Beginn der Bewegung ($t = t_0$) keinen seitlichen Anstofs bekommen hatte, dafs also seine Anfangsbewegung aus einer reinen Rotation um die Figurenaxe bestand. Dann liegt der anfängliche Drehimpuls in Richtung der Figurenaxe und ist mit $N$ zu bezeichnen. Ist die anfängliche Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale $\vartheta_0$ und setzt man $\cos\vartheta_0 = e_0$, so wird die Projektion des Drehimpulses auf die Vertikale

$$n = Ne_0. \tag{9}$$

Ueberdies erkennt man, dafs für $t = t_0$ notwendig $u' = 0$ sein mufs. Denn die Figurenaxe ist nach Voraussetzung zu Beginn Rotationsaxe, kann also ihre Lage im Raume momentan nicht ändern. Aus $u' = 0$ folgt nach Gl. (8) $U = 0$, d. h.

$$2Ah(1-e_0^2) - 2APe_0(1-e_0^2) + 2nNe_0 - N^2 - n^2 = 0.$$

Hieraus entnehmen wir den für unsere Bewegung gültigen Wert von $h$, indem wir $n$ nach (9) durch $N$ ausdrücken, nämlich

$$2Ah = 2APe_0 + N^2. \tag{10}$$

Wir wollen zunächst $U$ in seine Linearfaktoren spalten. Im Zähler von $U$ mufs sich der Faktor $e_0 - u$ herausziehen lassen, da ja $U$ für

*) Über eine Gattung reell periodischer Funktionen. Monatsberichte der Berliner Akademie 1866, pag. 97.

$u = e_0$ verschwindet. In der That ergiebt sich aus (7) mit Rücksicht auf (9) und (10):

$$(11)\qquad U = \frac{(e_0 - u)\,(2AP(1-u^2) - N^2(e_0 - u))}{A^2 + Aa(1-u^2)}.$$

Die weiteren Verschwindungsstellen des Zählers und Nenners mögen $e_1$, $e_2$ bez. $\pm e$ heifsen. Indem man den Nenner gleich Null setzt, findet man:

$$(12)\qquad e^2 = 1 + \frac{A}{a};$$

ferner ergiebt sich durch Nullsetzen des Zählers und Auflösung einer quadratischen Gleichung:

$$(13)\qquad \begin{cases} e_1 = \dfrac{N^2}{4AP}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{8APe_0}{N^2} + \dfrac{16A^2P^2}{N^4}}\right), \\ e_2 = \dfrac{N^2}{4AP}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{8APe_0}{N^2} + \dfrac{16A^2P^2}{N^4}}\right). \end{cases}$$

$|e_0|$ ist der geometrischen Bedeutung nach $< 1$, $|e|$ nach Gl. (12) $> 1$. Da wir $AP : N^2$ als kleine Zahl voraussetzen, können wir, um die Gröfsenordnung von $e_1$ und $e_2$ festzustellen, die Quadratwurzel in (13) nach dieser Gröfse entwickeln und erhalten:

$$(14)\qquad \begin{cases} e_1 = e_0 - \dfrac{2AP}{N^2}(1 - e_0^2) + \cdots \\ e_2 = \dfrac{N^2}{2AP} + \cdots \end{cases}$$

Es ist also $e_1$ wenig kleiner wie $e_0$, $e_2$ sehr grofs. Die gegenseitige Lage der fünf Stellen $e_0$, $e_1$, $e_2$, $\pm e$ wird durch Fig. 69 veranschaulicht.

Fig. 69.

Durch seine Linearfaktoren dargestellt, nimmt daher $U$ die Form an:

$$(15)\qquad U = \frac{2P}{a}\,\frac{(e_0 - u)\,(u - e_1)\,(e_2 - u)}{(e^2 - u^2)};$$

der Faktor $\frac{2P}{a}$ berechnet sich daraus, dafs sich $U$ nach der früheren Darstellung (11) für $u = \infty$ wie $-\frac{2P}{a}u$ verhalten mufs.

Betrachten wir nun das Integral (8). In diesem mufs $u$ notwendig zwischen den Grenzen $-1$ und $+1$ liegen und $dt$ reell und positiv sein. Beginnen wir also die Integration mit dem Anfangswerte $u = e_0$, so mufs $u$ zunächst abnehmen bis $e_1$, dann zunehmen bis $e_0$ u. s. f., da einer Unterschreitung von $e_1$ oder einer Überschreitung

von $e_0$ ein imaginärer Wert von $dt$ entsprechen würde. (Damit $dt$ positiv ausfällt, ist es nur nötig, das unbestimmte Vorzeichen von $\sqrt{U}$ bei jeder Umkehr der Integrationsrichtung ebenfalls umzukehren.) Die Integrationsvariable $u$ ist also auf das enge Gebiet zwischen $e_0$ und $e_1$ eingeschränkt. Wir schliefsen daraus, dafs sich der Faktor $e_2 - u$ während der Integration nur sehr wenig ändert, da sein Maximum $e_2 - e_1$ und sein Minimum $e_2 - e_0$ sowohl wegen der Gröfse von $e_2$ wie wegen der Kleinheit von $e_0 - e_1$ nahe zusammenfallen. Wir könnten ihn hiernach annähernd konstant setzen, etwa gleich

$$e_2 - u_0, \quad \text{wo} \quad u_0 = \frac{e_0 + e_1}{2}.$$

Nach (8) und (15) ist nun die *genaue* Zeit gegeben durch:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a}{2P}} \int_{e_0}^{u} \sqrt{\frac{e^2 - u^2}{(e_0 - u)(u - e_1)(e_2 - u)}}\, du,$$

wenn $t_0$ den der Anfangslage $u = e_0$ entsprechenden Zeitpunkt bezeichnet. Wir führen daneben eine *angenäherte* Zeitbestimmung ein, indem wir $e_2 - u$ durch den angegebenen Näherungswert $e_2 - u_0$ ersetzen, schreiben also:

$$t' - t_0 = \sqrt{\frac{a}{2P(e_2 - u_0)}} \int_{e_0}^{u} \sqrt{\frac{e^2 - u^2}{(e_0 - u)(u - e_1)}}\, du. \tag{16}$$

Diese beiden Zeiten stehen, wie man leicht einsieht, in der Beziehung zu einander, dafs stets

$$(t' - t_0)\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_1}} < t - t_0 < (t' - t_0)\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_0}}. \tag{17}$$

Haben wir also den angenäherten Wert der Zeit bestimmt, so ist damit der wahre Wert innerhalb sehr enger Grenzen bekannt. Um diese Grenzen noch näher festzusetzen, schreiben wir nach (14):

$$\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_1}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{u_0}{e_2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{e_1}{e_2} + \cdots\right) = 1 - \frac{u_0 - e_1}{2e_2} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{e_0 - e_1}{4e_2} + \cdots = 1 - \frac{A^2P^2}{N^4}(1 - e_0^2),$$

$$\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_0}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{u_0}{e_2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{e_0}{e_2} + \cdots\right) = 1 - \frac{u_0 - e_0}{2e_2} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{e_0 - e_1}{4e_2} + \cdots = 1 + \frac{A^2P^2}{N^4}(1 - e_0^2).$$

Wenn z. B., wie wir pag. 519 voraussetzten, $N^2 > 100\,AP$ ist, so weichen diese Gröfsen von der Einheit um weniger als $10^{-4}$ nach der einen oder anderen Seite hin ab und unsere angenäherte Zeitbestimmung

unterscheidet sich von der wahren um weniger als $\frac{1}{100}\%$. Für praktische Zwecke dürfte diese Abweichung überhaupt nicht in Betracht kommen. ✔

Durch die Einführung unserer angenäherten Zeit ist aber das Problem aus dem Gebiete der hyperelliptischen in das der elliptischen Integrale verlegt. Wir könnten auf das Integral (16) die früheren Methoden unmittelbar anwenden und *$u$ als elliptische Funktion der angenäherten Zeit $t'$ darstellen.* Die erforderliche Fehlerabschätzung läßt sich alsdann aus der Ungleichung (17) entnehmen. Wir wollen aber noch einen Schritt weiter gehen und die Berechnung auf elementare Funktionen zurückführen. Bemerken wir zu dem Zweck, daß sich auch der Faktor $e^2-u^2$ wegen der Kleinheit des Integrationsintervalles $e_0-e_1$ nur wenig ändert und näherungsweise gleich

$$e^2 - u_0^2$$

gesetzt werden kann. Dementsprechend führen wir eine zweite genäherte Zeitbestimmung ein, indem wir schreiben:

$$(18)\qquad t'' - t_0 = \sqrt{\frac{a(e^2-u_0^2)}{2P(e_2-u_0)}}\int_{e_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{(e_0-u)(u-e_1)}}.$$

Zwischen $t$ und $t''$ besteht dann die Ungleichung:

$$(19)\quad (t''-t_0)\sqrt{\frac{e_2-u_0}{e_2-e_1}\,\frac{e^2-e_0^2}{e^2-u_0^2}} < t-t_0 < (t''-t_0)\sqrt{\frac{e_2-u_0}{e_2-e_0}\,\frac{e^2-e_1^2}{e^2-u_0^2}}.$$

Die Grenzen, die hiernach dem wahren Zeitwerte gezogen sind, sind nicht mehr so enge wie vorher. Man berechnet nämlich nach (14):

$$\sqrt{\frac{e^2-e_0^2}{e^2-u_0^2}} = \left(1-\frac{1}{2}\frac{e_0^2}{e^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{u_0^2}{e^2}+\cdots\right) = 1-\frac{e_0^2-u_0^2}{2e^2}+\cdots$$
$$= 1-\frac{(e_0-e_1)e_0}{2e^2}+\cdots = 1-\frac{AP}{N^2}\frac{e_0(1-e_0^2)}{e^2}+\cdots$$

$$\sqrt{\frac{e^2-e_1^2}{e^2-u_0^2}} = \left(1-\frac{1}{2}\frac{e_1^2}{e^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{u_0^2}{e^2}+\cdots\right) = 1+\frac{u_0^2-e_1^2}{2e^2}+\cdots$$
$$= 1+\frac{(e_0-e_1)e_0}{2e^2}+\cdots = 1+\frac{AP}{N^2}\frac{e_0(1-e_0^2)}{e^2}+\cdots.$$

Diese Faktoren weichen also immer noch um weniger als $\frac{AP}{N^2}=10^{-2}$ von der Einheit ab; da die in (19) außerdem noch hinzutretenden Faktoren $\sqrt{\frac{e_2-u_0}{e_2-e_1}}$ und $\sqrt{\frac{e_2-u_0}{e_2-e_0}}$ von höherer Ordnung gleich 1 waren, so ist damit auch die Abweichung der wahren Zeit $t$ von der angenäherten Zeit $t''$ festgestellt. Diese Abweichung beträgt weniger als $1\%$ der

wahren Zeit, ist also nicht mehr so klein, wie vorher, aber für unsere Zwecke klein genug.

Das Integral (18) führt auf cyklometrische Funktionen. Der Bequemlichkeit wegen führen wir die Abkürzungen $\varepsilon$, $v$, $\omega$ ein, indem wir setzen:

$$(20)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \frac{e_0 - e_1}{2} = \frac{AP}{N^2}(1 - e_0^2) + \cdots, \quad v = u - u_0, \\ \omega = \pi \sqrt{\frac{a}{2P}\frac{e^2 - u_0^2}{e_2 - u_0}}; \end{cases}$$

dann wird

$$\int_{e_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(e_0 - u)(u - e_1)}} = \int_{\varepsilon}^{v} \frac{dv}{\sqrt{\varepsilon^2 - v^2}} = \arcsin \frac{v}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2},$$

also

$$(21)\qquad t'' - t_0 = \frac{\omega}{\pi}\left(\arcsin \frac{v}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2}\right).$$

$\omega$ bedeutet dabei die näherungsweise berechnete Zeit, während welcher $u$ das Integrationsintervall von $e_0$ bis $e_1$ oder $v$ das entsprechende Gebiet von $+\varepsilon$ bis $-\varepsilon$ einmal durchläuft. Wir nennen $\omega$ die „halbe Periode der Kreiselbewegung“. Sie ist gleich derjenigen Zeit, während welcher die Figurenaxe aus der einen äufsersten Neigung $e_0$ in die andere äufserste Neigung $e_1$ oder aus der mittleren Neigung $u_0$ in eben diese Neigung auf kürzestem Wege zurückkehrt. Nach der Zeit $2\omega$ wiederholen sich die Neigungen der Figurenaxe periodisch. Der noch unbestimmt gelassene Zeitpunkt $t_0$ möge der Bequemlichkeit halber gleich $\frac{\omega}{2}$ genommen werden, der Nullpunkt der Zeit $t''$ also mit der mittleren Neigung der Figurenaxe ($v = 0$ oder $u = u_0$) zusammenfallen. Gleichung (21) geht dann über in:

$$(22)\qquad t'' = \frac{\omega}{\pi} \arcsin \frac{v}{\varepsilon}.$$

Es liegt auf der Hand, dafs wir diese Beziehung lieber „umkehren“ und in der folgenden Form schreiben werden:

$$(23)\qquad v = \varepsilon \sin \frac{\pi t''}{\omega} \quad \text{oder} \quad u = u_0 + \varepsilon \sin \frac{\pi t''}{\omega}.$$

Damit sind die wechselnden Neigungen der Figurenaxe *in expliziter Weise als Funktion der angenäherten Zeit $t''$* beschrieben. Um den bei dieser Berechnung zugelassenen Fehler abzuschätzen, d. h. um den Wert von $u$, der zu der wahren Zeit $t$ gehört, in Grenzen einzuschliefsen, brauchen wir nur die Ungleichung (19) in gewisser Weise ebenfalls umzukehren. Diese Ungleichung sagt uns, wieweit die wahren und

angenäherten Zeiten, die zu gleichem $u$ gehören, höchstens von einander abweichen. Wir können sie auch so schreiben:

$$\sqrt{\frac{e_2 - e_0}{e_2 - u_0}\,\frac{e^2 - u_0^2}{e^2 - e_1^2}}\,(t - t_0) < t'' - t_0 < \sqrt{\frac{e_2 - e_1}{e_2 - u_0}\,\frac{e^2 - u_0^2}{e^2 - e_0^2}}\,(t - t_0).$$

Der wahre Wert von $u$, d. h. der Wert von $u$ zur Zeit $t$, mufs hiernach gleich einem derjenigen Werte sein, welche sich nach Formel (23) für das vorstehend bezeichnete Iutervall der angenäherten Zeit bestimmen. Da (von der Umgebung der Integrationsgrenzen $e_0$ und $e_1$ abgesehen) $u$ mit wachsendem $t$ beständig wächst oder beständig abnimmt, so können wir auch sagen: *Der wahre Wert von $u$ ist zwischen denjenigen Werten enthalten, welche sich für die angenäherten Zeitpunkte*

$$(24)\qquad \begin{cases} t'' - t_0 = \sqrt{\dfrac{e_2 - e_0}{e_2 - u_0}\,\dfrac{e^2 - u_0^2}{e^2 - e_1^2}}\,(t - t_0) \quad \text{und} \\ t'' - t_0 = \sqrt{\dfrac{e_2 - e_1}{e_2 - u_0}\,\dfrac{e^2 - u_0^2}{e^2 - e_0^2}}\,(t - t_0) \end{cases}$$

*nach Gleichung* (23) *berechnen.* Die gewünschte Fehlerabschätzung ist damit geleistet.

In entsprechender Weise verfahren wir mit dem Winkel $\psi$ in Gl. (8'). Setzen wir für $n$ und $U$ die Werte aus (9) und (15) ein, so ergiebt sich zunächst

$$(25)\qquad \psi = \frac{N}{A}\sqrt{\frac{a}{2P}}\int \frac{e_0 - u}{1 - u^2}\sqrt{\frac{e^2 - u^2}{(e_0 - u)(u - e_1)(e_2 - u)}}\,du.$$

Wir könnten auch hier wieder ein angenähertes Azimuth $\psi'$ einführen, welches sich durch ein elliptisches Integral berechnen läfst, indem wir den Faktor $e_2 - u$ ersetzen durch $e_2 - u_0$. Indessen gehen wir lieber gleich einen Schritt weiter und schreiben:

$$(26)\qquad \psi'' = \frac{N}{A}\,\frac{1}{1 - u_0^2}\sqrt{\frac{a}{2P}\,\frac{e^2 - u_0^2}{e_2 - u_0}}\int \frac{(e_0 - u)\,du}{\sqrt{(e_0 - u)(u - e_1)}},$$

sodafs sich die weitere Rechnung im trigonometrischen Gebiete abspielt. Wir substituieren als Integrationsvariable die angenäherte Zeit $t''$; nach Gl. (18) und (23) haben wir

$$dt'' = \sqrt{\frac{a}{2P}\,\frac{e^2 - u_0^2}{e_2 - u_0}}\,\frac{du}{\sqrt{(e_0 - u)(u - e_1)}},$$

$$u = u_0 + \varepsilon \sin\frac{\pi t''}{\omega}, \quad e_0 - u = \varepsilon\left(1 - \sin\frac{\pi t''}{\omega}\right)$$

und daher

$$(27)\qquad \psi'' = \frac{N}{A}\,\frac{\varepsilon}{1 - u_0^2}\int\left(1 - \sin\frac{\pi t''}{\omega}\right)dt''$$

$$= \frac{N}{A}\,\frac{\varepsilon}{1 - u_0^2}\,\frac{\omega}{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega}(t'' - t_0) + \cos\frac{\pi t''}{\omega}\right).$$

Die Integrationskonstante wurde hierbei so gewählt, dafs $\psi''$ verschwindet für $t'' = t_0 = \omega/2$. *Wiederum ist der angenäherte Wert von $\psi$ als explizite Funktion der angenäherten Zeit $t''$ dargestellt.*

Zwischen dem wahren Azimuth $\psi$ und dem genäherten $\psi''$ besteht, wie der Vergleich von (26) und (25) ergiebt, die Beziehung

$$(28)\qquad \frac{1-u_0^2}{1-e_1^2}\sqrt{\frac{e^2-e_0^2}{e^2-u_0^2}\frac{e_2-u_0}{e_2-e_1}}\,\psi'' < \psi < \frac{1-u_0^2}{1-e_0^2}\sqrt{\frac{e^2-e_1^2}{e^2-u_0^2}\frac{e_2-u_0}{e_2-e_0}}\,\psi''.$$

Da beide Faktoren, mit denen $\psi''$ multipliziert ist, wenig von 1 verschieden sind, ist hierdurch der wahre Wert von $\psi$ mit Hülfe des angenäherten in enge Grenzen eingeschlossen.

Durch $\psi$ und $u$ lassen sich die übrigen auf die Kreiselbewegung bezüglichen Gröfsen darstellen. Besonders werden wir uns für die *Bahnkurve des Stützpunktes* in der tragenden Horizontalebene interessieren, weil diese bei der Bewegung in erster Linie ins Auge fällt und sich auch experimentell bequem aufzeichnen läfst (vgl. das folg. Kap. § 10). In der Horizontalebene breiten wir uns eine komplexe Variable $\xi$ aus, sodafs der Nullpunkt derselben mit dem Punkt $S'$ zusammenfällt. Den wechselnden Lagen des Stützpunktes $O$ entspricht dann eine Folge von $\xi$-Werten und die Bahnkurve sowie das Zeitmafs, in dem sie von dem Stützpunkt durchlaufen wird, sind vollständig bekannt, wenn wir diese $\xi$-Werte als Funktion der Zeit in der Form $\xi = f(t)$ dargestellt haben.

Zunächst ist der absolute Betrag von $\xi$ nach Fig. 68 leicht anzugeben; es ist nämlich

$$(29)\qquad |\xi| = OS' = E\sin\vartheta = E\sqrt{1-u^2}.$$

Sodann ist der Winkel des Strahles $OS'$ (der Projektion der Figurenaxe auf die Horizontalebene) gegen einen beliebigen festen Strahl dieser Ebene bis auf eine Konstante gleich dem Winkel $\psi$, den die Knotenlinie gegen eine beliebige feste horizontale Gerade bildet.

Die Gleichung der Bahnkurve schreibt sich daher in der folgenden Form:

$$(30)\qquad \xi = E\sqrt{1-u^2}\,e^{i\psi},$$

wobei die Berechnung von $u$ und $\psi$ nach Gl. (23) und (27), die Fehlerbestimmung nach Ungleichung (24) und (28) zu erfolgen hat.

Wir werden den Gang der Rechnung sogleich an einem Zahlenbeispiel erläutern. Vorher wird es gut sein, um den Charakter der Bahnkurve zu veranschaulichen, weniger genau zu verfahren. Wir wollen einmal den Unterschied zwischen wahrer und genäherter Zeitbestimmung vernachlässigen und auch sonst einige Vereinfachungen eintreten lassen, die sich durch Entwicklung nach der als klein vorausgesetzten Gröfse

$$\varepsilon = \frac{AP}{N^2}(1 - e_0^2) + \cdots = \frac{AP}{N^2}(1 - u_0^2) + \cdots$$

ergeben. Wir schreiben in dem Sinne:

$$u = u_0 + \varepsilon \sin \frac{\pi t}{\omega}, \quad \sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - u_0^2}\left(1 - \frac{\varepsilon u_0}{1 - u_0^2} \sin \frac{\pi t}{\omega}\right)$$

$$= \sqrt{1 - u_0^2}\left(1 - \frac{APu_0}{N^2} \sin \frac{\pi t}{\omega}\right), \quad \psi = \frac{P}{N}\left(t - t_0 + \frac{\omega}{\pi} \cos \frac{\pi t}{\omega}\right).$$

Hiernach wird die vereinfachte Gleichung der Bahnkurve

$$\xi = E\sqrt{1 - u_0^2}\left(1 - \frac{APu_0}{N^2} \sin \frac{\pi t}{\omega}\right) e^{\frac{iP}{N}\left(t - t_0 + \frac{\omega}{\pi} \cos \frac{\pi t}{\omega}\right)}. \tag{31}$$

Dieselbe legt folgende Deutung nahe: Im Mittel bewegt sich der Stützpunkt um den festen Punkt $S'$ auf einem Kreise vom Radius $E\sqrt{1 - u_0^2}$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{P}{N}$ herum. Dieser Teil der Bewegung wird als eine reguläre *Präzession* der Figurenaxe zu bezeichnen sein. Ihr überlagert sich eine Schwankung oder *Nutation* der Figurenaxe von der Periode $2\omega$, vermöge deren sowohl Gröfse als Richtung des Fahrstrahls $S'O$ periodisch abgeändert wird. Zeitdauer und Betrag der Nutation sind gering, desgl. im allgemeinen die Winkelgeschwindigkeit der Präzession. *Die Bahnkurve des Stützpunktes besteht daher aus einem Kreise mit zahlreichen auf ihm aufsitzenden Zacken; sowohl wegen ihrer Kleinheit wie wegen der Schnelligkeit, mit der sie durchlaufen werden, entziehen sich die Nutationen der groben Beobachtung und die Bewegung erscheint in erster Linie als eine reguläre Präzession.* Sie hat ganz denselben Charakter wie die frühere pseudoreguläre Präzession des Kreisels mit festem Stützpunkte und stimmt mit dieser auch in der Gröfse der Präzessionsgeschwindigkeit $\frac{P}{N}$ überein.

Wir kommen nun zur genauen Durchführung eines Zahlenbeispiels. Unser Kreisel sei ein homogener Rotationskegel von der Höhe $h = 8$ cm, sein Schwerpunkt $S$ liegt in der Entfernung $E = \frac{3}{4}h = 6$ cm von seiner Spitze $O$. Soll das für den Schwerpunkt konstruierte Trägheitsellipsoid eine Kugel sein, so mufs der Radius des Grundkreises $r$ gleich der halben Höhe sein. Man findet nämlich unschwer für die Trägheitsmomente $C, A_1, A$ um die Figurenaxe, bezw. um eine zur Figurenaxe senkrechte Axe durch $O$, bezw. um eine ebensolche Axe durch $S$:

$$C = \frac{3}{10}Mr^2, \quad A_1 = \frac{3}{20}M(r^2 + 4h^2), \quad A = \frac{3}{20}M\left(r^2 + \frac{1}{4}h^2\right),$$

wo $M$ die gesamte Masse des Kreisels ist. Durch Gleichsetzen der Werte von $A$ und $C$ ergiebt sich in der That

$$r = \frac{1}{2} h = 4 \text{ cm}.$$

Mithin wird

$$A = C = \frac{48}{10} M, \quad a = ME^2 = 36 M$$

und

$$\frac{A}{a} = \frac{4}{30}, \quad e^2 = 1 + \frac{A}{a} = 1{,}133.$$

Die anfängliche Rotation, welche um die Figurenaxe erfolgen sollte, möge die Umdrehungszahl 20 pro Sekunde besitzen, sodafs die Winkelgeschwindigkeit $2\pi \cdot 20$ beträgt. Es ist dann

$$N^2 = 4\pi^2 \cdot 400 \cdot A^2$$

und

$$\frac{N^2}{AP} = \frac{4\pi^2 \cdot 40 \cdot 48 M}{MgE} = \frac{4\pi^2 \cdot 40 \cdot 48}{981{,}0 \cdot 6} = 12{,}878.$$

Wir haben also dieses Verhältnis erheblich kleiner gewählt, als es vorher vorausgesetzt wurde, weil sonst die zu zeichnende Figur gar zu wenig charakteristisch ausfallen würde und die Bahnkurve von einem Kreise kaum zu unterscheiden wäre. Der Grad der Annäherung, der sich ja wesentlich durch die Gröfse dieses Verhältnisses bestimmt, wird dementsprechend im folgenden etwas weniger günstig ausfallen, wie bei der allgemeinen Betrachtung. Dies schadet indessen nichts, da uns an dieser Stelle nicht die Kleinheit des Fehlers sondern seine Abschätzung in erster Linie interessiert. In der Anfangslage (zur Zeit $t_0$) möge die Figurenaxe den Winkel 45° gegen die Vertikale bilden. Es ist dann

$$e_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707.$$

Die Gröfsen $e_1$ und $e_2$ ergeben sich durch Nullsetzen des Zählers von $U$, also nach (11) durch Auflösen der quadratischen Gleichung:

$$2AP(1 - u^2) = N^2(e_0 - u).$$

Setzt man die angegebenen Zahlenwerte für $\frac{N^2}{AP}$ und $e_0$ ein, so erhält man

$$u^2 - 6{,}439\, u = -3{,}552, \quad e_1 = 0{,}609, \quad e_2 = 5{,}830.$$

Es wird daher

$$\varepsilon = \frac{e_0 - e_1}{2} = 0{,}049, \quad u_0 = \frac{e_0 + e_1}{2} = 0{,}658, \quad u_0^2 = 0{,}433,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a(e^2 - u_0^2)}{2P(e_2 - u_0)}}\, \pi = 6{,}38 \cdot 10^{-2} \text{ sec}.$$

und

$$\frac{N}{A}\frac{\varepsilon}{1-u_0^2}\frac{\omega}{\pi} = 0{,}220.$$

Wir berechnen noch die folgenden Faktoren, welche nach (24) und (28) für die Fehlerabschätzung wesentlich sind:

$$\sqrt{\frac{e_2-e_0}{e_2-u_0}\frac{e^2-u_0^2}{e^2-e_1^2}} = 1 - 4{,}6\cdot 10^{-2}, \quad \sqrt{\frac{e_2-e_1}{e_2-u_0}\frac{e^2-u_0^2}{e^2-e_0^2}} = 1 + 5{,}7\cdot 10^{-2},$$

$$\frac{1-u_0^2}{1-e_1^2}\sqrt{\frac{e^2-e_0^2}{e^2-u_0^2}\frac{e_2-u_0}{e_2-e_1}} = 1 - 1{,}6\cdot 10^{-1},$$

$$\frac{1-u_0^2}{1-e_0^2}\sqrt{\frac{e^2-e_1^2}{e^2-u_0^2}\frac{e_2-u_0}{e_2-e_0}} = 1 + 1{,}9\cdot 10^{-1}.$$

Nun bestimmen wir die Bahnkurve und zwar beispielsweise dasjenige Stück derselben, welches von der Anfangszeit $t = t_0 = \frac{\omega}{2}$ bis zur Zeit $t = t_6 = \frac{3\omega}{2}$ durchlaufen wird. Zwischen diese beiden Zeitpunkte schalten wir noch fünf äquidistante Zeiten $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$ ein. Die Länge eines zwischen ihnen enthaltenen Zeitintervalles beträgt dann $\frac{\omega}{6}\cdot$ Diesen „wahren“ Zeitpunkten ordnen wir nach Gl. (24) je zwei „angenäherte“ Zeitpunkte zu.

Z. B. gehören zu $t_1$ die beiden Werte

$$t'' - t_0 = (1 - 4{,}6\cdot 10^{-2})\frac{\omega}{6} \text{ und } t'' - t_0 = (1 + 5{,}7\cdot 10^{-2})\frac{\omega}{6}\cdot$$

Bilden wir lieber das Produkt $\frac{\pi t''}{\omega}$, welches in unsern Formeln als Argument der trigonometrischen Funktionen vorkommt, und drücken dieses in Gradmafs aus, so ergiebt sich

$$\frac{\pi t''}{\omega} = \frac{\pi}{2} + (1 - 4{,}6\cdot 10^{-2})\frac{\pi}{6} = 90^0 + 28^0\,37'$$

bezw.

$$\frac{\pi t''}{\omega} = \frac{\pi}{2} + (1 + 5{,}7\cdot 10^{-2})\frac{\pi}{6} = 90^0 + 31^0\,43'.$$

Nach Gl. (23) gehören zu diesen beiden genäherten Zeiten die folgenden beiden $u$-Werte:

$$u = 0{,}658 + 0{,}049\cos(28^0\,37') = 0{,}701$$

bezw.

$$u = 0{,}658 + 0{,}049\cos(31^0\,43') = 0{,}699.$$

Mithin kann der wahre Wert von $u$ zur Zeit $t_1$ gleichgesetzt werden

$$u = 0{,}700 \pm \vartheta\cdot 0{,}001,$$

unter $\vartheta$ (ebenso wie unten unter $\vartheta', \vartheta'' \ldots$) einen unbekannten echten Bruch verstanden.

Aus den Grenzen für $u$ ergeben sich entsprechende Grenzen für die Länge des Vektors $S'Q = E\sqrt{1-u^2}$. Drücken wir letztere in mm aus, so finden wir dafür die beiden äufsersten Werte 42,78 und 42,90 mm. Wir schreiben daher für $t = t_1$: $E\sqrt{1-u^2} = 42{,}84 \pm \vartheta' \cdot 0{,}06$ mm.

Es handelt sich sodann um die Richtung des Vektors $S'O$ zur Zeit $t_1$, also um den Winkel $\psi$. Wir berechnen zunächst die Näherungswerte $\psi''$, welche nach Gl. (27) zu den oben angegebenen Grenzwerten von $t''$ gehören, nämlich für

$$\frac{\pi t''}{\omega} = 90^0 + 28^0\,37', \quad \psi'' = 0{,}220\left(28^0\,37' - \frac{180^0}{\pi}\sin 28^0\,37'\right) = 15'$$

$$\frac{\pi t''}{\omega} = 90^0 + 31^0\,43', \quad \psi'' = 0{,}220\left(31^0\,43' - \frac{180^0}{\pi}\sin 31^0\,43'\right) = 21'.$$

Der erste dieser Werte entspricht der Neigung $u = 0{,}701$ der Figurenaxe; die Unsicherheit desselben folgt aus der Ungl. (28), welche besagt, dafs für den wahren Wert von $\psi$ bei eben jener Neigung gilt:

$$(1 - 1{,}6 \cdot 10^{-1})\,15' < \psi < (1 + 1{,}9 \cdot 10^{-1})\,15'$$

oder

$$13' < \psi < 18'.$$

Ebenso ergiebt sich für den wahren Wert von $\psi$ bei der Neigung $u = 0{,}699$ der Figurenaxe aus (28):

$$(1 - 1{,}6 \cdot 10^{-1})\,21' < \psi < (1 + 1{,}9 \cdot 10^{-1})\,21'$$

d. h.

$$18' < \psi < 25'.$$

Da zur Zeit $t = t_1$, wie wir sahen, die Gröfse $u$ jedenfalls zwischen $u = 0{,}701$ und 0,609 liegt, mufs der Winkel $\psi$ jedenfalls zwischen 13′ und 25′ enthalten sein. Wir schreiben daher für $t = t_1$:

$$\psi = 19' \pm \vartheta'' \cdot 6'.$$

In derselben Weise sind die Gröfsen $u$, $E\sqrt{1-u^2}$, $\psi$ für die Zeitpunkte $t = t_2, t_3, \ldots$ zu bestimmen. (Für den Anfangswert $t = t_0$ ergiebt sich offenbar und zwar genau $u = e_0 = 0{,}707$, $E\sqrt{1-u^2} = 42{,}43$ mm, $\psi = 0$.) Das Resultat der Rechnung enthält die Tabelle von pag. 530:

| | $t_0$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 0,707 | 0,700 ± 0,001 | 0,682 ± 0,002 | 0,658 ± 0,004 | 0,632 ± 0,005 | 0,616 ± 0,003 | 0,609 ± 0,000 |
| $E\sqrt{1-u^2}$ | 42,4 | 42,8 ± 0,1 | 44,0 ± 0,1 | 45,2 ± 0,2 | 46,4 ± 0,3 | 47,2 ± 0,2 | 47,6 ± 0,0 |
| $\psi$ | 0 | 19′ ± 6′ | 2° 26′ ± 46′ | 7° 38′ ± 2° 20′ | 16° 21′ ± 4° 50′ | 28° 3′ ± 7° 58′ | 41° 21′ ± 11° 8′ |

Fig. 70.

Auf Grund dieser Zahlen ist Fig. 70 gezeichnet. Sie zeigt, wie sich die Bahnkurve zwischen den beiden Begrenzungskreisen vom Radius $E\sqrt{1-e_0^2} = 42{,}4$ mm und $E\sqrt{1-e_1^2} = 47{,}6$ mm hin- und herzieht. Den gröſseren der beiden Kreise tangiert sie, auf dem kleineren sitzt sie mit Spitzen auf. Daſs wir mit begrenzter Genauigkeit rechneten,

kommt darin zum Ausdruck, dafs die Bahnkurve nicht als mathematische Linie sondern als Streifen von wechselnder Breite erscheint, ferner darin, dafs den Zeitpunkten $t_i$ kein bestimmter Punkt der Linie, sondern ein gewisser Bereich des Streifens entspricht, der in der Figur kenntlich gemacht ist. Dieser Bereich wird um so gröfser, die Sicherheit unserer Rechnung also um so geringer, je weiter wir uns von der Anfangszeit $t = t_0$ entfernen. Die Zeitpunkte $t_{-1}, t_{-2}, \ldots$ gehen der Anfangszeit $t_0$ in demselben Abstande vorher, wie die Zeitpunkte $t_1, t_2, \ldots$ ihr folgen. Die Bahnkurve für $t < t_0$ ergiebt sich aus der für $t > t_0$ einfach durch Spiegelung an dem Strahle $\psi = 0$.

Man wird beim Anblick unserer Figur zugeben, dafs unsere angenäherte Berechnung hinsichtlich der *Gestalt* der Bahnkurve allen Ansprüchen genügt, die man vom naturwissenschaftlichen Standpunkte aus an die Lösung der vorliegenden Aufgabe stellen kann; hinsichtlich des *Zeitmafses*, in dem unsere Bahnkurve durchlaufen wird, kann man zweifelhaft sein, ob unsere Annäherung befriedigt, da z. B. für $t = t_{\pm 5}$ der Bereich, innerhalb dessen die Lage des Stützpunktes unsicher ist, etwas grofs wird. Indessen können wir geltend machen, dafs in dieser Hinsicht die Genauigkeit unserer Rechnung etwa parallel derjenigen Genauigkeit gehen mag, mit der sich der Ort des Stützpunktes zu einer gegebenen Zeit durch eine nicht besonders verfeinerte Beobachtungsmethode feststellen läfst.

Vor allem aber müssen wir bedenken, dafs der wirkliche Bewegungsverlauf durch die Reibung an der Unterlage, von der wir in diesem Paragraphen abgesehen haben, in hohem Grade entstellt wird. Wollten wir daher die vorangehenden Rechnungen verschärfen, ohne dabei auf die Reibung Rücksicht zu nehmen, so hiefse dieses, sich mit Kleinigkeiten aufhalten und die Hauptsache verfehlen.

---

# Kapitel VII.

## Theorie und Wirklichkeit. Einflufs der Reibung, des Luftwiderstandes, der Elastizität von Material und Unterlage auf die Kreiselbewegung.

### § 1. Der Gegensatz zwischen rationeller und physikalischer oder zwischen himmlischer und irdischer Mechanik.

Man bezeichnet seit altersher die abstrakte Mechanik, welche die Fülle der Bewegungserscheinungen durch mathematische Deduktion aus wenigen Grundsätzen abzuleiten bestrebt ist, als *rationelle* (= deduktive) Mechanik. Daneben tritt diejenige Behandlung der mechanischen Probleme, welche die Wirklichkeit in ausgiebigerer Weise mit Hinzuziehung von Erfahrungsthatsachen und Experimenten berücksichtigt, fast etwas schüchtern als *physikalische* (= induktive) Mechanik auf. Angesichts der weitgehenden Abweichungen aber zwischen den Resultaten der abstrakten Theorie und den Thatsachen der Wirklichkeit möchte man die Frage aufwerfen, ob nicht für die Mehrzahl der Anwendungsgebiete die physikalische Mechanik in Wahrheit die rationelle und die sog. rationelle in Wahrheit höchst unphysikalisch und irrationell ist.

Der Grund für die uns ständig entgegentretenden Differenzen zwischen Theorie und Wirklichkeit liegt, wie allbekannt, in dem Auftreten von Energie verzehrenden oder Energie zerstreuenden Kräften. Die abstrakte Theorie stellt sich gerne so, als ob diese Kräfte nur sekundäre Bedeutung hätten, als ob es sich dabei um Erscheinungen zweiter Ordnung handelte, welche das Gesamtbild zwar trüben aber nicht völlig entstellen können. Ein etwas krass gewähltes Beispiel möge uns lehren, wie weit diese Annahme zutrifft.

Das deutsche Infanteriegewehr Modell 88 erteilt dem Geschosse eine Anfangsgeschwindigkeit von ca. 620 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$. (Die Beobachtung dieser Geschwindigkeit geschieht etwa 25 m vor der Mündung.) Sofern wir den Luftwiderstand und die Luftreibung ignorieren wollen, die hier als Energie verzehrende Momente ins Spiel kommen, ist die Flugbahn die bekannte Parabel und die gröfste Schufsweite wird erzielt

bei einem Abgangswinkel (Elevationswinkel) von 45° gegen die Horizontale. Nach den elementaren Gesetzen der Wurfbewegung berechnet sich, wenn man mit $v$ den gemeinsamen Wert der vertikalen und der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit

$$v = \frac{620}{\sqrt{2}} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

bezeichnet, die bei dem genannten Schusse vorkommende gröfste Erhebung $H$ des Geschosses über den Erdboden und die Schufsweite $W$ aus den Formeln:

$$H = \frac{v^2}{2g} = \text{ca. } 10 \text{ km}, \qquad W = \frac{2v^2}{g} = \text{ca. } 40 \text{ km}.$$

Schlägt man aber die Schiefsvorschrift für die Infanterie auf, welche das auf diesem Gebiete vorliegende reiche Beobachtungsmaterial zusammenfafst, so findet man auf Seite 17, dafs die gröfste beobachtete Schufsweite ungefähr 4 km beträgt und dafs sie einem Abgangswinkel von 32° entspricht. Die höchste Erhebung des Geschosses wird bei dieser Bahn rund $1/2$ km und liegt nicht, wie bei der abstrakten Wurfbewegung, in der Mitte, sondern etwas dahinter in der Entfernung 2,2 km von der Mündung.

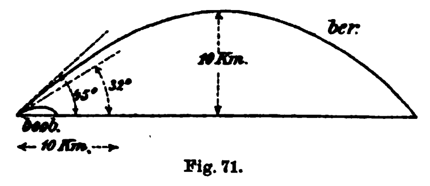


Fig. 71.

Deutlicher noch wie die angegebenen Zahlen redet die nebenstehende Figur. Sie zeigt, dafs die unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes berechnete Bahn („ber.") auch nicht eine entfernte Annäherung an die beobachtete Bahn („beob.") giebt.

Allerdings denkt niemand daran, in den ballistischen Problemen den Luftwiderstand zu vernachlässigen. Auch kann zugegeben werden, dafs sein Einflufs bei geringeren Geschwindigkeiten nicht so stark ins Gewicht fallen wird, wie bei den gewaltigen Geschwindigkeiten der modernen Schufswaffen. Denn es ist theoretisch verständlich und durch die Beobachtung bestätigt, dafs mit wachsender Geschwindigkeit und ganz besonders in der Nähe der Schallgeschwindigkeit der Luftwiderstand rapide zunehmen mufs. Trotzdem dürfte unser Beispiel geeignet sein, uns vor einer Überschätzung der Ergebnisse der rationellen Mechanik und vor einer Unterschätzung von sog. „Nebenumständen" wie Reibung etc. zu warnen, die gegebenenfalls leicht zur Hauptsache werden können.

Die Abneigung der mathematischen Schriftsteller vor der Inangriffnahme der Reibungsprobleme macht sich schon bei dem grofsen Be-

gründer der analytischen Mechanik, bei Lagrange, geltend. Er erwähnt an keiner Stelle seines Werkes die Reibung der festen Körper auf einander. Diesem nicht nachahmenswerten Beispiele folgt auch Kirchhoff in seinen Vorlesungen über Mechanik. Und doch ist die Reibung, nächst der Schwere, wohl die wichtigste Kraft in unserem Dasein. Gewöhnlich wird sie als etwas Schädliches und Unerwünschtes angesehen. In der That rühren die Energieverluste und daher die Betriebskosten bei all unseren Maschinen, Fahrzeugen etc. zum gröſsten Teil von irgend einer Art Reibung her. Es hieſse jedoch ungerecht sein, wenn man die wohlthätigen Seiten der Reibung verkennen wollte. Nur die Reibung ermöglicht es uns, daſs wir uns auf unserer Erde nach Belieben vorwärts bewegen können, sei es durch die Kraft unserer Glieder, sei es mit Hülfe irgend eines Gefährtes. Man erinnere sich z. B., daſs im Betriebe der Straſsenbahnen, wenn durch Eisbildung der wohlthätige Einfluſs der Reibung zwischen Rad und Schiene geschwächt ist, der Wagen nicht von der Stelle kommt. Weiter aber: Die Reibung ermöglicht es mir, den Federhalter zwischen den Fingern zu halten, falls ich nur — entsprechend dem unten zu besprechenden Reibungsgesetze — die Finger mit einem genügenden Druck gegen den Halter presse. Die Reibung verhindert die Bücher, die auf meinem (doch gewiſs nicht genau horizontalen) Schreibtische liegen, der Schwere folgend zur Erde hinab zu gleiten; sie verhütet, daſs der Berg, der vor meinem Fenster liegt, zu Thale kommt und die Stadt verschüttet.

Woher rührt es nun, werden wir uns fragen, daſs trotz ihrer maſsgebenden Wichtigkeit für alle irdischen Verhältnisse die Reibung in der theoretischen Mechanik so wenig Beachtung findet? Ein Grund hierfür ist historischer Natur.

Das älteste Anwendungsgebiet der mechanischen Lehren und der älteste Zweig der mathematischen Naturwissenschaft überhaupt ist die *Astronomie.* Die Begründer und Hauptförderer der Mechanik, Galilei, Newton, Lagrange, Laplace haben wesentlich astronomische Fragen bei ihren Untersuchungen im Auge gehabt. Dadurch ist es gekommen, daſs die theoretische Mechanik ein Gewand bekommen hat, das wesentlich für astronomische Zwecke zugeschnitten erscheint. Die Himmelskörper nun bewegen sich merklich reibungslos im luftleeren Raume und können für die meisten Zwecke als einzelne Massenpunkte angesehen werden. In der Mechanik des Himmels also — aber auch nur hier — treten die Reibungserscheinungen zurück. Hier steht das Problem der $n$ frei im Raum beweglichen Massenpunkte, die mit konservativen Kräften auf einander wirken, im Mittelpunkte des Interesses, ein Problem, welches vielfach den Hauptgegenstand der Vorlesungen und Lehrbücher

über theoretische Mechanik ausmacht, welches aber in den irdischen Geschehnissen niemals realisiert wird.

Man bezeichnet den Sachverhalt deutlicher, wenn man statt von rationeller und physikalischer Mechanik von *himmlischer* und *irdischer Mechanik* spricht. Die uns überkommene Form der theoretischen Mechanik hat ihren Ursprung und ihr eigentliches Anwendungsgebiet in der Mechanik des Himmels. Um den vielfach verworrenen und komplizierten Verhältnissen auf der Erde gerecht zu werden, mufs sie durch Erfahrungsmaterial wesentlich ergänzt werden.

Ein anderer Grund für die geringe Beachtung, welche die Reibungsprobleme bei den Theoretikern finden, ist die geringe Zuverlässigkeit der physikalischen Grundlagen der Reibungstheorie. Wir sind uns von vornherein bewufst, dafs die üblichen Gesetze z. B. über die gleitende Reibung fester Körper auf einander, über den Luftwiderstand, über die Reibung im Innern der Flüssigkeiten oder über die innere Reibung der festen Körper nur grobe Annäherungen sind, dafs die physikalischen Umstände bei diesen Vorgängen äufserst kompliziert sind und vielleicht überhaupt nicht in allgemeingültige Formeln gefafst werden können. Eine naturgemäfse Berücksichtigung des Luftwiderstandes z. B. müfste von der Mitbewegung der umgebenden Luft ausgehen. Die Energieverluste, die der Luftwiderstand erzeugt, wären einerseits aus der inneren Reibung der Luft, andererseits aus der Abgabe von Bewegungsenergie an weiter entfernte Luftschichten zu berechnen. Bei sehr schnellen Bewegungen, die mit merklichen Luft-Verdichtungen und -Verdünnungen verbunden sein werden, erfolgt die Energieabgabe mit Schallgeschwindigkeit; hierbei müfste aufser der Trägheit auch die Elastizität und die Thermodynamik der Luft in Rechnung gesetzt werden. Einen Blick in die Mannigfaltigkeit der hier vorliegenden Verhältnisse gestatten uns die bekannten schönen Momentaufnahmen der durch die Geschosse erzeugten Luftwellen. Ihnen gegenüber mufs eine Formel, die den Luftwiderstand durch irgend eine Potenz der Geschwindigkeit ausdrücken will, geradezu ärmlich erscheinen. Ebenso aussichtslos wird es sein, den Schiffswiderstand angesichts des komplizierten Spieles der Wellen in der Nähe eines Dampfers in eine einfache Formel hineinzwängen zu wollen. Jedenfalls werden hier nur ausgedehnte, mit den gröfsten Mitteln durchgeführte Versuche einigen Aufschlufs liefern. Theorie und Rechnung können auf diesen Gebieten eher als Anleitung zur vernünftigen Anstellung von Experimenten wie zur Voraussage der Erscheinungen dienen. In manchen Fällen hat die Theorie Regeln (sog. Ähnlichkeitsgesetze) liefern können, um die durch Modellversuche, also durch Versuche in verkleinertem Mafsstabe ge-

fundenen Resultate auf die gröſseren Verhältnisse der wirklichen Probleme zu übertragen. Die Leistung der Theorie ist in solchen Fällen sehr wertvoll, aber doch viel bescheidener, wie z. B. bei den Problemen der Himmelsmechanik.

Die Gröſse des Widerstandes wird in den vorgenannten Beispielen auſserdem von der besonderen Form des Geschosses oder des Schiffes abhängen. Es kann durchaus sein, daſs eine kleine Abänderung der Form eine erhebliche Änderung des Widerstandsgesetzes bewirkt. Ähnliches gilt von der gleitenden Reibung. Hier kommt es auf scheinbar geringfügige Umstände weit mehr an, als man erwarten und wünschen möchte. Eine durch Abnutzung veränderte Oberfläche verhält sich anders wie eine frisch bearbeitete. Teilchen des abgeriebenen Materials oder Staubkörnchen, welche sich zwischen den Reibungsflächen befinden, können die Gröſse der Reibung beträchtlich beeinflussen; ein Feuchtigkeitsniederschlag aus der umgebenden Luft kann wie ein Schmiermittel wirken und die Reibungsgesetze nicht nur quantitativ sondern auch qualitativ gründlich verändern. Hier gilt also der für den Naturforscher höchst unbequeme und störende Satz: Kleine Ursachen, groſse Wirkungen. Vor der kritiklosen Benutzung von Reibungsziffern muſs aus diesem Grunde gewarnt werden. Ziffern, die für gewisse Versuchsumstände gefunden sind, brauchen deshalb noch nicht für andere Umstände zu gelten. Diese Ziffern auf zwei oder drei Dezimalen anzugeben, wie es in den technischen Kalendern ebensowohl wie in vielen Lehrbüchern der Experimentalphysik geschieht, hat jedenfalls keinen Wert.

Man begreift es hiernach, daſs der Laboratoriums-Physiker, der in der angenehmen Lage ist, seine Probleme frei, zum Teil nach ästhetischen Gesichtspunkten zu wählen, an den Reibungsfragen gerne vorbeigeht, weil er sich aus ihrem Studium keine reinen und allgemeinen Gesetze verspricht. Anders steht der Techniker zu den Reibungsgesetzen, die für ihn Lebensfragen sind. Deshalb rühren die neueren Beiträge zur Kenntnis der Reibungsgesetze, die wir im folgenden Paragraphen zu nennen haben werden, wesentlich von technischer Seite her.

Aus dieser Sachlage folgt aber weiter, daſs die mathematische Behandlung der Reibungsprobleme unter anderen Gesichtspunkten zu erfolgen hat, wie die der Probleme der rationellen Mechanik. Der Mathematiker strebt seiner Erziehung und Gewohnheit nach dahin, die ihm vorgelegten Probleme mit völliger Schärfe zu lösen, so daſs eine Berechnung auf beliebig viele Dezimalen theoretisch möglich wird. Diese Methode ist bei den Aufgaben der Himmelsmechanik mit Rück-

sicht auf die grofse Schärfe der astronomischen Beobachtungen in der That zweckmäfsig; bei allen Aufgaben aber, bei denen Reibungseinflüsse etc. wesentlich sind, d. h. bei allen Aufgaben der irdischen Mechanik, würde eine solche Genauigkeit der Rechnung in unschönem Mifsverhältnis stehen zu der Genauigkeit der physikalischen Grundlagen. Hier ist es vielmehr angezeigt, nicht nach quantitativer Durchrechnung, sondern nach qualitativem Verständnis der Erscheinungen zu streben, und wo man quantitativ vorgeht, von vornherein nicht mit beliebiger sondern mit begrenzter Genauigkeit zu rechnen. Und dies um so mehr, als die mit Reibungsgliedern behafteten Differentialgleichungen z. B. in der Kreiseltheorie reichlich kompliziert werden und, wie man gewöhnlich sagen würde, „sich nicht integrieren lassen". Dem gegenüber betonen wir den Grundsatz: man *soll* solche Gleichungen nicht integrieren; man soll sie interpretieren und konstruieren, wie wir dies im Folgenden versuchen werden.

In den vorstehenden Erörterungen ist begründet, weshalb und in welchem Sinne wir die Reibungsprobleme beim Kreisel zu ausführlicherer Behandlung bringen werden, als man es bisher gethan hat. Allerdings bleiben wir hinter dem Ziel, welches man erreichen möchte, zurück, weil wir uns bei dem Fehlen ausreichender experimenteller Grundlagen auf eine schematische Behandlung der Probleme beschränken müssen.

## § 2. Bericht über die Reibungsgesetze.

Unsere Kenntnis der Reibungsgesetze ist bekanntlich von Coulomb begründet. Wir gehen hier etwas näher darauf ein, weil die einschlägigen Fragen in den Kreisen der Theoretiker meist wenig bekannt sind*).

Coulomb fand, dafs an der Grenze zweier auf einander gleitender fester Körper eine Kraft auftritt, welche für jeden der beiden Körper seiner Bewegung relativ gegen den anderen entgegengerichtet und proportional ist dem gesamten Normaldruck, mit dem die Körper gegeneinander geprefst werden. Der Proportionalitätsfaktor heifst *Reibungskoeffizient* (oder, genauer gesagt, Reibungskoeffizient der Bewegung). Dieser wird als Materialkonstante oder richtiger als eine

*) Zur weiteren Orientierung verweisen wir auf das gerade in Reibungsfragen sehr reichhaltige Lehrbuch von J. Perry, Applied Mechanics, New York 1898, hin, das wir für diesen und den vorigen Paragraph mehrfach benutzt haben. Einen lehrreichen Bericht über die Gesamtliteratur der Reibung verdankt man F. Masi: Le nuove vedute nelle ricerche theoriche ed experimentali sull' attrito. Bologna bei Zanichelli 1897.

sowohl für das Material wie für die Oberflächenbeschaffenheit der beiden Körper charakteristische Konstante angesehen. Von der Geschwindigkeit des Gleitens soll also die Reibung und der Reibungskoeffizient unabhängig sein, desgl. von der Gröſse der Berührungsfläche oder, was bei gleichem Gesamtdruck auf dasselbe herauskommt, von der Gröſse des spezifischen Druckes, des Druckes auf die Flächeneinheit der Berührungsfläche. In Formeln heiſst das Coulombsche Reibungsgesetz, wenn man mit $\mu$ den Reibungskoeffizienten, mit $N$ den gesamten Normaldruck, mit $W$ die Gröſse des Reibungswiderstandes bezeichnet:

$$W = \mu N.$$

Wir wollen diese Aussage zunächst dahin beschränken, daſs sie nur für die *trockene Reibung*, nicht für die Reibung bei Anwesenheit eines Schmiermittels gelte. Ferner haben wir an den bekannten Unterschied zwischen der Reibung der Bewegung und der der Ruhe (dynamische und statische Reibung) zu erinnern. Wir erläutern die Reibung der Ruhe folgendermaſsen:

Wenn die treibende Kraft, welche die Bewegung des Versuchskörpers gegen die Unterlage, oder die relative Bewegung beider bewirken soll, nicht ausreicht um die Reibung zu überwinden, werden wir der Reibung nur die Gröſse der treibenden Kraft selbst, der sie das Gleichgewicht hält, zuschreiben. Dies gilt solange, bis die treibende Kraft einen Grenzwert überschreitet, bei dem Bewegung eintritt und der sich wieder proportional dem Normaldrucke $N$ erweist. Der Proportionalitätsfaktor möge mit $\mu_0$ bezeichnet werden und heiſst *Reibungskoeffizient der Ruhe*. Das Reibungsgesetz für die Ruhe kann man daher in der Gleichung ausdrücken;

$$W \leqq \mu_0 N.$$

Der Reibungskoeffizient der Ruhe ist meist beträchtlich gröſser als der der Bewegung. Diesen Umstand sowie das Reibungsgesetz überhaupt veranschaulicht ein schönes Experiment, welches G. Herrmann*) angegeben hat und welches jeder ohne weiteres wiederholen kann.

Man lege einen Stock auf seine beiden, in gleicher Höhe ausgestreckten Zeigefinger. Darauf nähere man die Finger einander. Auf welchem Finger wird der Stock zu gleiten beginnen? Auf demjenigen, der weiter von dem Schwerpunkt des Stockes absteht; denn die Normaldrücke $N_1$, $N_2$, mit denen der Stock auf beiden Fingern aufliegt, sind nach dem Hebelgesetze für jeden Finger proportional dem Abstand des

*) Der Reibungswinkel, Festschrift zum Jubiläum der Univ. Würzburg, 1882.

Schwerpunktes von dem anderen Finger; bei dem weiter abstehenden Finger ist also der Normaldruck der kleinere; nach dem Reibungsgesetz ist hier auch die Reibung, welche dem Gleiten entgegenwirkt, kleiner wie bei dem anderen Finger; hier mufs also die Gleitung beginnen.

Der Stock gleitet nun auf diesem Finger, nicht nur bis der Abstand dieses Fingers vom Schwerpunkt des Stockes gleich dem des anderen Fingers geworden ist, sondern noch etwas länger, wegen $\mu_0 > \mu$. Erst wenn sich die Schwerpunktsabstände der beiden Finger verhalten wie $\mu : \mu_0$ tritt ein Wechsel der Bewegung ein; der Stock ruht jetzt auf demjenigen Finger, auf dem er vorher glitt und beginnt auf dem anderen zu gleiten. Denn die Normaldrücke $N$ auf beiden Fingern verhalten sich umgekehrt wie die Schwerpunktsabstände, also in dem genannten Augenblicke wie $\mu_0 : \mu$; die Reibung der Bewegung an dem einen Finger wird dann gleich der Reibung der Ruhe an dem anderen und, wenn das Gleiten in dem bisherigen Sinne andauern würde, sogar gröfser als diese, was offenbar widersinnig ist. Dieses Spiel wird sich fortgesetzt wiederholen, wobei der Schwerpunktsabstand desjenigen Fingers, auf dem der Stock gleitet, sich jedesmal bis zum $\frac{\mu}{\mu_0}$-ten Teile des Schwerpunktsabstandes des anderen Fingers vermindert. Das Resultat ist, dafs die Schwerpunktsabstände beider Finger sich wechselweise verkleinern und dafs, wenn die Finger zusammengebracht sind, der Stock von ihnen in seinem Schwerpunkte unterstützt wird, also frei schwebt!

Aufser der Veranschaulichung der Reibungsgesetze gestattet das Experiment eine Messung des Verhältnisses $\mu_0 : \mu$. Es genügt hierzu, einige Umkehrpunkte der Bewegung auf dem Stocke zu markieren und ihre Abstände von dem Schwerpunkt zu messen. Das Verhältnis der Abstände zweier auf einander folgender Umkehrpunkte liefert das gesuchte Verhältnis der Reibungskoeffizienten. Die Gesamtheit der Umkehrpunkte bildet auf beiden Seiten die Punktfolge einer geometrischen Reihe. Wenn der Stock nicht zu kurz ist, wird die Messung verhältnismäfsig genau.

Die Verschiedenheit der Werte von $\mu_0$ und $\mu$ legt die Vermutung nahe, dafs ein stetiger Übergang zwischen dem zur Gleitgeschwindigkeit Null gehörigen Werte $\mu_0$ und dem zu merklich gröfseren Geschwindigkeiten gehörigen Werte $\mu$ stattfinden möge. Diese Vermutung wird durch Versuche von Jenkin und Ewing*) bestätigt. Bei Materialien

*) London Philos. Transactions Bd. 167 (1877), S. 509.

mit erheblich verschiedenen Reibungskoeffizienten $\mu_0$ und $\mu$ konnte der stetige Übergang in der That nachgewiesen werden.

Wenn wir also mit Coulomb die Unabhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Geschwindigkeit behaupten wollen, müssen wir hierbei zunächst das Gebiet sehr geringer Geschwindigkeiten ausschlieſsen. Wie bewährt sich nun diese Unabhängigkeit bei gröſseren Geschwindigkeiten?

Die alten Versuche des General Morin, die in den Jahren 1831—1833 in Metz angestellt wurden und die ein Geschwindigkeitsintervall bis $4 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ umfassen, schienen die Unabhängigkeit zu bestätigen. Die Morinschen Versuchsergebnisse bilden noch heute den eisernen Bestand der Zahlenangaben über Reibungskoeffizienten in den technischen Handbüchern und den Lehrbüchern der Experimentalphysik. Eine groſse Zuverlässigkeit wird ihnen aber kaum zugeschrieben werden können, schon deshalb nicht, weil nach dem im vorigen Paragraph Gesagten solche Zahlenangaben in hohem Maſse von den Nebenumständen des Experimentes abhängen.

Das Verhalten des Reibungskoeffizienten bei höherer Gleitgeschwindigkeit blieb jedenfalls eine offene Frage, die erst durch die Entwickelung des Eisenbahnwesens und der Bremsvorrichtungen aktuell wurde. Zwischen Bremsklotz und Radreifen haben wir eine richtige gleitende Reibung ohne Schmiermittel, während die Reibung zwischen Rad und Schiene, wenigstens beabsichtigtermaſsen und in der Regel, rollende Reibung ist und nur in dem Ausnahmefalle gleitende Reibung wird, wo die Räder auf den Schienen schleifen. Über die Reibung zwischen Bremsklotz und Rad liegen vor allem Versuche von *Douglas Galton**) vor, welche im gröſsten Maſsstabe mit Unterstützung der Firma Westinghouse auf verschiedenen englischen Linien ausgeführt wurden. Ein Versuchswagen von Galton enthielt eine ganze Reihe von Tachometern und Dynamometern. Die Tachometer lieferten die Umfangsgeschwindigkeit der Räder und die Fortbewegungsgeschwindigkeit des Wagens. Die Gleitgeschwindigkeit zwischen Rad und Bremsklotz ist gleich der ersten dieser Geschwindigkeit, die eventuelle Gleitgeschwindigkeit zwischen Rad und Schiene gleich der Differenz beider. Die Dynamometer maſsen 1) den Bremsdruck, mit dem der Bremsklotz an das Rad gepreſst wird, also diejenige Kraft, die für die Reibung zwischen Bremse und Rad als Normaldruck $N$ wirkt; 2) den Reibungswiderstand $W$

*) Institution of Mechanical Engineers Proceedings 1878, 1879, s. insbes. 1879, S. 172 oder Engineering 1879, S. 371 oder Reports of the British Association (Dublin) 1878.

zwischen Bremse und Rad; 3) den Widerstand gegen die Vorwärtsbewegung des Zuges pro Achse, der sich aus Luftwiderstand, rollender Reibung an den Schienen u. s. w. zusammensetzt, der aber, wenn ein Gleiten auf den Schienen Platz greift, im wesentlichen den Reibungswiderstand $W'$ dieses Gleitens darstellt. Alle diese Tacho- und Dynamometer arbeiteten selbstregistrierend und lieferten somit die fraglichen Geschwindigkeiten und Kräfte in ihrer zeitlichen Veränderlichkeit. Auf die sehr interessanten Diagramme dieser Gröfsen, die so erhalten wurden, kann hier nur hingewiesen werden. Wir müssen uns auf die aus ihnen zu ziehenden Folgerungen betr. die Veränderlichkeit des Reibungskoeffizienten beschränken. Der Koeffizient der Reibung zwischen Bremsklotz und Rad ergiebt sich durch Division aus den gemessenen Kräften $W$ und $N$, während der Koeffizient der Reibung zwischen Rad und Schiene aus der ebenfalls gemessenen Reibung $W'$ und dem auf das einzelne Rad entfallenden Teil des Wagengewichtes $G$ folgt.

Natürlich zeigten die zu gleichen Gleitgeschwindigkeiten bei verschiedenen Versuchen gehörenden Reibungskoeffizienten unter sich keine sehr weitgehende Übereinstimmung; ihre Gröfse hing sowohl vom Wetter und der dadurch bedingten Feuchtigkeit der gleitenden Oberflächen, wie von deren Reinheit, wie auch namentlich von der Bremsdauer ab, durch welche offenbar eine Steigerung der Temperatur und damit eine Änderung der Oberflächenbeschaffenheit bewirkt wird. Z. B. kam es vor, dafs nachdem der Bremsdruck 20 Sekunden gewirkt hatte, der Reibungskoeffizient auf die Hälfte seines ursprünglichen Wertes zurückgegangen war. Trotzdem zeigt das Mittel der erhaltenen Reibungskoeffizienten aus sehr vielen (bis 100) Versuchen eine deutliche Gesetzmäfsigkeit, nämlich *eine beständige Abnahme des Reibungskoeffizienten mit wachsender Geschwindigkeit.* Fig. 72 giebt den Koeffizienten der Reibung zwischen Bremsklotz und Rad (Bremsklotz aus Gufseisen, Radreifen aus Stahl), und zwar in der ausgezogenen Linie den Mittelwert der Beobachtungen, in den punktierten die bei jeder Geschwindigkeit beobachteten Gröfst- und Kleinstwerte. Der ganze Streifen zwischen diesen Grenzlinien ist mit Beobachtungspunkten erfüllt zu denken, die sich nach der mittleren Linie hin verdichten. Man erkennt zunächst wieder den Unterschied zwischen dem Reibungskoeffizienten der Ruhe und dem bei beträchtlicher Bewegung. Weiter aber zeigt die Figur, dafs der Reibungskoeffizient bei der Geschwindigkeit 60 km/Stunde

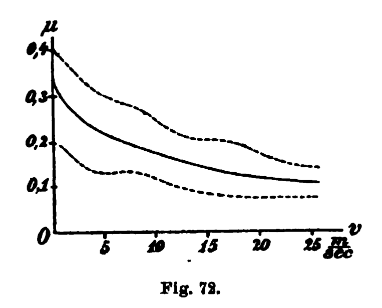


Fig. 72.

= 16,7 m/sec. = mittlerer Schnellzugsgeschwindigkeit weniger als die Hälfte, bei 90 km/Stunde = 25 m/sec. = höchster zur Zeit in Deutschland zulässiger Fahrgeschwindigkeit nurmehr etwa ein Drittel des Reibungskoeffizienten der Ruhe (0,33) beträgt. Natürlich lieſse sich die Abhängigkeit zwischen $\mu$ und $v$ unschwer auch durch eine oder die andere Formel ausdrücken. Wir sehen hiervon sowie von der Angabe von Zahlenwerten ab, weil die Figur alles wiedergiebt, was ihrem Genauigkeitsgrade nach aus den Beobachtungen zu schlieſsen ist und weil jede zur Darstellung der Beobachtungen benützte Formel in hohem Maſse willkürlich wäre. — Über den Koeffizienten der gleitenden Reibung zwischen Rad und Schiene geben die Galtonschen Versuche einen minder sicheren Aufschluſs; soviel ist jedoch aus ihnen zweifellos zu erkennen, daſs auch dieser Koeffizient mit wachsender Geschwindigkeit von seinem Gröſstwerte bei kleiner Geschwindigkeit kontinuierlich abnimmt.

Ältere französische sowie neuere in Deutschland angestellte Versuche*) lieferten im wesentlichen das gleiche Ergebnis.

Übrigens aber ist zu beachten, daſs die Galton'schen Versuche sich auf ein sehr ausgedehntes Geschwindigkeitsintervall beziehen. Bei mäſsig veränderlicher Geschwindigkeit ist auch die Veränderlichkeit des Reibungskoeffizienten nur gering; man hat z. B. für $v = 2$ bis 6 m/sec. nach der Kurve der Galtonschen Mittelwerte etwa $\mu = 0{,}27$ bis 0,23. Diese Unterschiede sind angesichts der allgemeinen Unsicherheit der Reibungsziffern unbedenklich zu vernachlässigen. Die Coulombsche Annahme eines von der Geschwindigkeit unabhängigen Reibungskoeffizienten wird hierdurch für ein *mäſsiges* Geschwindigkeitsintervall in erster Annäherung bestätigt. Bei unserer Anwendung auf den Kreisel, bei dem Geschwindigkeiten von der Ordnung der Schnellzugsgeschwindigkeiten nicht in Betracht kommen, werden wir hiernach den Reibungskoeffizienten mit Coulomb konstant setzen dürfen.

Auch die in dem Coulombschen Gesetz ausgesprochene Unabhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Gröſse der Berührungsfläche bedarf der experimentellen Nachprüfung. Hiernach müſste bei der Bewegung eines Prismas von 10 cm² Grundfläche und 4 cm Höhe auf einer ebenen Unterlage dieselbe Reibung zu überwinden sein, wie bei der Bewegung eines Prismas von 20 cm² Grundfläche und 2 cm Höhe, weil, gleiches Material vorausgesetzt, der Gesamtnormaldruck gegen die Unterlage, nämlich das Gewicht des Prismas, beidemal gleich

*) Vgl. Organ der Fortschr. des Eisenbahnwesens 1889, S. 114. Der Bremsklotz bestand hierbei aus Stahlguſs. Die Versuche wurden nicht auf der Strecke, sondern in einer Werkstatt angestellt.

ist, während sich die Normaldrücke pro Flächeneinheit in beiden Fällen wie 2 : 1 verhalten. Es scheint*), dafs sich diese Folgerung in der Erfahrung gut bestätigt, sofern nicht durch sehr starke spezifische Pressungen merkliche Deformationen der Unterlage hervorgerufen werden. —

Bekanntlich ist auch der Vorgang des Abrollens zweier Oberflächen aufeinander, der sich (scheinbar) ohne Gleitung vollzieht, wenn auch in geringerem Grade mit Energieverlusten verbunden. Das Gesetz der *rollenden Reibung*, welches man üblicher Weise bei der Berechnung dieser Energieverluste zu Grunde legt, wurde ebenfalls von *Coulomb* aufgestellt. Hierbei ist es zweckmäfsig, nicht von einer *reibenden Einzelkraft*, wie bei der Gleitung zu sprechen, sondern von einem Reibungsmomente, welches von dem zur Abrollung aufgewandten Drehmoment in jedem Augenblicke zu überwinden ist. Bezeichnet wiederum $N$ den gesamten Normaldruck an der Berührungsstelle zwischen der Unterlage und der „Rolle", $M$ das Reibungsmoment, so setzt man

$$M = \nu N.$$

$\nu$ heifst dabei *Koeffizient der rollenden Reibung;* wie die Gleichung zeigt, ist er keine reine Zahl wie der Koeffizient der gleitenden Reibung, sondern von der Dimension einer Länge. Auch dieser Koeffizient wird als Material- bezw. als Oberflächenkonstante angesehen. Will man $M$ durch eine in der Oberfläche thätige reibende Einzelkraft $W$ ersetzen, so hat man die letztere gleich $M/r$ zu setzen, wenn $r$ den Radius der Rolle oder bei nicht kreisförmigem Umrifs derselben den Krümmungsradius an der betr. Stelle der Umrifslinie bedeutet; diese Einzelkraft $W$ ist also dem Normaldruck direkt und dem Radius umgekehrt proportional.

Über den Mechanismus der rollenden Reibung giebt eine schöne Arbeit von O. Reynolds**) einigen Aufschlufs. Reynolds weist nach, dafs mit der Abrollung infolge elastischer Deformationen stets eine gewisse Gleitung verbunden ist.

Nimmt man zur Vereinfachung der Anschauung an, dafs die Unterlage wesentlich weicher ist, wie die Rolle (Unterlage aus Kautschuck, Rolle aus Eisen), so kann man von der Deformation der Rolle absehen und hat nur die der Unterlage zu betrachten. Letztere wird aus einer muldenförmigen Einsenkung bestehen, so zwar dafs in der Mitte der Einsenkung die Unterlage gedehnt, nach den Seiten hin aufgestaucht

*) Perry l. c. pag. 67.

**) On rolling Friction, London Philos. Transactions Vol. 166, Part I (1876) und Ges. Werke Bd. I, S. 110.

und zusammengepreſst ist. Die Berührung findet alsdann nicht mehr in einem geometrischen Punkt statt, sondern in der Oberfläche der Mulde, deren Mittelpunkt wir als mittleren Berührungspunkt ($P$) bezeichnen. In der beistehenden Figur sind eine Anzahl von Punkten auf Rolle und Unterlage markiert. Die Punkte auf der Rolle sind äquidistant, die auf der Unterlage waren es vor der Deformation, sie zeigen also in ihren wechselnden Abständen schematisch den Sinn der eingetretenen Formänderung an. Die mit gleichen Ziffern versehenen Punkte sind bei fortschreitendem Abrollungsprozeſs bestimmt, als mittlere Berührungspunkte der Reihe nach mit einander zusammenzufallen, was durch die mit dem Fortschreiten der Rolle verbundene Dehnung der Unterlage an der mittleren Berührungsstelle ermöglicht wird. In dem augenblicklichen Stadium fallen diese Punkte aber nicht zusammen. Es muſs daher beispielsweise der Punkt 4 von dem augenblicklichen Stadium bis zu demjenigen, wo er zum mittleren Berührungspunkte geworden ist, um dasjenige Stückchen auf dem Rollenumfange entlang gleiten, um welches die beiden Punkte 4 in der Figur abstehen. Das gleiche gilt für jeden Punkt der Berührungsfläche. In dieser findet also in der That eine gewisse gleitende Reibung statt.

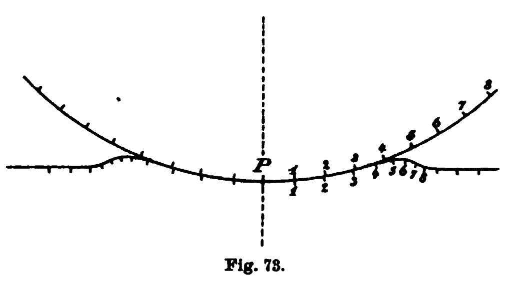


Fig. 73.

Der gesamte Energieverlust der rollenden Reibung wird sich zum Teil aus dem mit dieser gleitenden Reibung verbundenen Energieverlust, zum Teil aus der zur elastischen Deformation erforderlichen Arbeit zusammensetzen, insoweit nämlich die letztere in nicht umkehrbarer Form auftritt.

Daſs die in Fig. 73 dargelegte Vorstellung zutreffend ist, konnte Reynolds folgendermaſsen experimentell nachweisen. Man bemerkt, daſs unter den oben vorausgesetzten Verhältnissen die Rolle ihren Umfang nicht auf der natürlichen Oberfläche der Unterlage, sondern auf der bei $P$ gedehnten abwickelt. Miſst man den Weg, den die Rolle nach einer Umdrehung zurückgelegt hat, auf der in ihre natürlichen Längenverhältnisse zurückgekehrten Unterlage, so wird sich derselbe etwas kürzer ergeben müssen als der Umfang der Rolle. Dies hat Reynolds in der That experimentell nachgewiesen für den Fall, daſs die Rolle härter ist wie die Unterlage. Das umgekehrte muſs stattfinden und findet nach Reynolds statt, wenn die Unterlage erheblich härter ist

als die Rolle. Sind beide aus gleichem Material, so ist der auf der Unterlage gemessene Weg wieder etwas kürzer wie der Umfang der Rolle, wovon die obige Überlegung bei näherem Eingehen ebenfalls Rechenschaft ablegen würde.

Bis zur genauen Messung der Gröfse des Reibungswiderstandes und zur Nachprüfung des Coulombschen Ansatzes ist die Reynolds'sche Untersuchung nicht durchgeführt. Dafs dieser einfache Ansatz der Wirklichkeit sehr genau entspricht, ist bei der komplizierten Natur des Vorganges nicht gerade wahrscheinlich. —

Neben der gleitenden und rollenden Reibung spricht man drittens noch von der *bohrenden Reibung*, und zwar da, wo sich auf einem Körper ein anderer um die Normale im Berührungspunkte beider dreht. Da in diesem Falle die Berührung als punktförmig und der Berührungspunkt als Punkt der Drehaxe vorausgesetzt wird, findet theoretisch ein Gleiten beider Körper gegeneinander nicht statt. Dieser Umstand hat zur Einführung der besonderen Bezeichnung „bohrende Reibung" Veranlassung gegeben. Indessen führt sich der Vorgang sofort auf den der gleitenden Reibung zurück, wenn man nur eine etwas ausgedehnte Berührung der Körper annimmt. Man kann dann von einem mittleren Radius $a$ der Berührungsfläche sprechen und wird die rings um die Drehaxe verteilten Kräfte der gleitenden Reibung auf diesen mittleren Abstand $a$ reduzieren dürfen. Sie setzen sich offenbar zu einem Drehmoment um die Normale zur Berührungsfläche zusammen, dessen Gröfse sich aus dem Gesetz der gleitenden Reibung berechnet zu

$$M = \mu' N, \quad \mu' = \mu a.$$

Der Proportionalitätsfaktor $\mu'$ kann als *Koeffizient der bohrenden Reibung* bezeichnet werden, er hat die Dimension einer Länge und hängt aufser von dem Material und der Oberflächenbeschaffenheit auch von der Ausdehnung der Berührungsfläche ab. Natürlich soll durch die Gleichung $\mu' = \mu a$ nicht behauptet werden, dafs sich der Koeffizient der bohrenden Reibung aus dem der gleitenden Reibung vorausbestimmen liefse, wenn man die Gröfse der Berührungsfläche messen könnte. Vielmehr soll diese Gleichung nur einen Anhalt für die Bedeutung des Koeffizienten $\mu'$ und für das ungefähre Gröfsenverhältnis der bohrenden und gleitenden Reibung liefern, einen Anhalt, der uns im nächsten Paragraph von Nutzen sein wird.

Ausdrücklich haben wir uns in diesem Bericht auf die *trockene Reibung* beschränkt, trotzdem ja die Reibung unter Anwendung von *Schmiermitteln* für die Praxis das weit überwiegende Interesse hat. Man ist heutzutage zu der Einsicht gekommen, dafs die letztere ganz anderen Gesetzen gehorcht, dafs sie nämlich auf den Gesetzen der inneren

Reibung zäher Flüssigkeiten beruht, während die ältere technische Litteratur sie nach dem Coulombschen Schema der trockenen Reibung behandelt. Wir können heute (mit Petroff und Reynolds) von einer *hydrodynamischen Theorie der Schmierung* sprechen, einer Theorie, die durch rationell angestellte Versuche soweit bestätigt wird, als man es nach der Schwierigkeit des Gegenstandes erwarten kann*). Das wirkliche physikalische Verständnis der Schmiermittelreibung ist auf diesem Wege wesentlich gefördert. Wird es möglich sein, so möchten wir zum Schluſs fragen, auch die trockene Reibung unserem physikalischen Verständnis näher zu bringen, indem wir die zwischen den reibenden Oberflächen verbleibende Luftschicht als eine Art Schmiermittel auffassen und auf sie die Reibungsgesetze der kinetischen Gastheorie anwenden? und ferner: Wieweit ist mit Reibung stets auch Abreibung der Oberflächen verbunden?

## § 3. Qualitatives über die gleitende und bohrende Reibung beim Kreisel.

Um den Einfluſs der Reibung beim Kreisel mit festem Stützpunkte zu studieren, haben wir zunächst zuzusehen, unter welchen Umständen hier die Reibung zustande kommt. Das Bild, welches wir uns von diesen Umständen machen werden, ist freilich ein sehr schematisches und idealisiertes und dürfte von Fall zu Fall je nach den besonderen Verhältnissen der jedesmaligen Vorrichtung erheblich von der Wirklichkeit abweichen.

Betrachten wir z. B. die beiden Apparate, welche pag. 1 und 2 abgebildet sind. Wenn wir von der Reibung ganz absehen dürften, würde die Bewegung beider Apparate, sofern wir bei Nr. 2 die Masse der Ringe gegenüber der Masse des inneren Schwungkörpers vernachlässigen, nach genau denselben Gesetzen erfolgen. In Hinsicht auf die Reibung aber verhalten sie sich ganz verschieden.

Bei dem Apparat von pag. 2 treten Reibungskräfte in den Punkten der drei Lager auf, welche die Axe des äuſseren, des inneren Ringes und des Schwungrades tragen. Wir haben es hier im Sinne des vorigen Paragraphen mit Flüssigkeitsreibung zu thun, wenn die Lager hinreichend geschmiert sind. Jedenfalls wird die Reibungswirkung in einem Drehmomente bestehen, welches um jede der drei Axen der augenblicklichen Rotation entgegenarbeitet. Da die Bewegung um jene drei Axen gerade

*) Vgl. hierzu den oben zit. Bericht von Masi. Wir verweisen ferner auf die durch Berücksichtigung aller einschlägigen technischen Gesichtspunkte ausgezeichneten Versuche von R. Stribeck: Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager. Ztschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1902, Nr. 36, 38 und 39.

durch die Eulerschen Winkel $\psi$, $\vartheta$, $\varphi$ gegeben wird, so würde in den Lagrangeschen Gleichungen für diese Winkel je ein Zusatzglied auftreten, welches das Reibungsmoment für die fragliche Axe bedeutet.

Wir gedenken darauf nicht weiter einzugehen, sondern beschränken uns auf das Modell von pag. 1. Hier müssen wir zunächst die Gestalt des unteren Endes der Figurenaxe und die Gestalt der Pfanne, welche jene trägt, ins Auge fassen. Wir wollen annehmen, die Figurenaxe sei unten *kugelförmig* abgerundet und die Pfannenoberfläche sei ein *Kreiskegel;* die Oberflächen seien trocken und nicht elastisch nachgiebig.

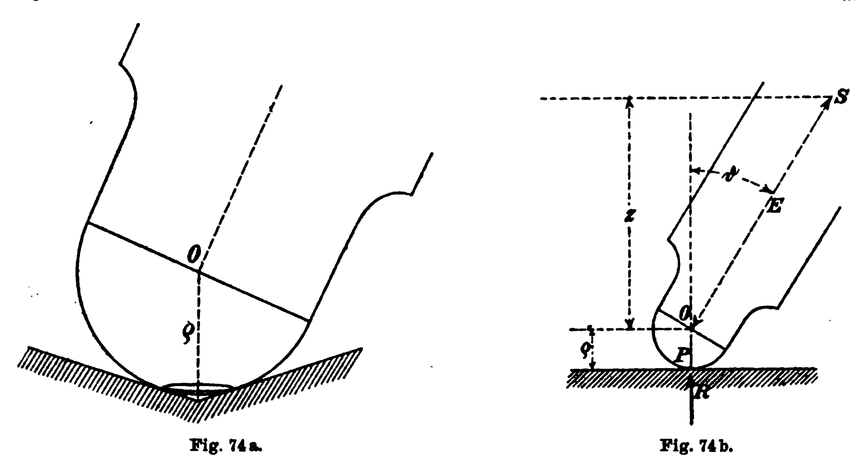



Fig. 74 a. Fig. 74 b.

Die Berührung zwischen Kugel und Kegel findet dann allemal in einem festen horizontalen Kreise statt. Die Kugel verschiebt sich bei allen Bewegungen der Figurenaxe in sich. Ihr Mittelpunkt bleibt also im Raume genau fest. *In diesem Mittelpunkte haben wir den als ruhend vorausgesetzten Punkt O des Kreisels vor uns.*

In dem Modell von pag. 1 ist der Kegel, der die Pfanne begrenzt, sehr flach; für die theoretische Berechnung der Reibung wird es bequem ja sogar unumgänglich sein, ihn als absolut flach vorauszusetzen, also den Kegel in eine Ebene ausarten zu lassen. Der kleine Kreis, in dem die Kugel den flachen Kegel berühren würde, schrumpft dann in einen *Punkt* zusammen, der stets genau senkrecht unter dem Kugelmittelpunkt liegt. Der Begriff „Stützpunkt" zerlegt sich so in zwei Begriffe: *Fester Punkt O = Mittelpunkt der Kugel* und *Berührungspunkt P = Grenze des eben genannten kleinen Berührungskreises.*

Freilich dürfen wir uns nicht verhehlen, daſs wir uns auf diese Weise von den wirklichen Bedingungen unseres Problemes entscheidend entfernen, daſs wir *nach* dem Grenzübergange nicht mehr den Kreisel mit festem Punkte sondern genau genommen den auf der Unterlage

35*

frei beweglichen Kreisel vor uns haben und daſs die Befestigung des Punktes $O$ in dem Maſse in Fortfall kommt, als wir den Kegel flacher werden lassen. Es geht hier wie so oft in den Anwendungen, daſs ein Grenzübergang mathematisch bequem aber physikalisch widersinnig ist (man denke an den Übergang von molekularen zu unendlich kleinen Dimensionen in der gesamten theoretischen Physik) und daſs man nach den Bedingungen der Aufgabe nur *bis in die Nähe der Grenze*, nicht *bis zur Grenze selbst* gehen dürfte. In allen solchen Fällen wird die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daſs die mathematische Behandlung des Grenzfalles nicht wesentlich von dem Falle der Wirklichkeit abweicht, eine Voraussetzung, die durch die Resultate der Behandlung in der Regel bestätigt wird. Die entsprechende Voraussetzung wollen wir hier ausdrücklich hervorheben: Wir nehmen an, daſs seitliche Bewegungen des Punktes $O$ durch geeignete mechanische Vorrichtungen an der Unterlage ausgeschlossen werden, daſs wir aber im Übrigen die Reibungswirkung ohne erheblichen Fehler so berechnen dürfen, als ob die Unterlage eine Ebene wäre.

Der Übergang von dem ursprünglichen Berührungs*kreise* zu dem nunmehrigen Berührungs*punkte* ist deshalb geboten, weil wir sonst in endlose Weiterungen betr. die elastischen Deformationen an der Berührungsstelle verfallen würden. Wollten wir nämlich mit dem Berührungs*kreise* operieren, so müſsten wir, um die Reibung bestimmen zu können, zunächst feststellen, wie sich der Gegendruck der Pfanne auf den Kreisel über den Umfang des Berührungskreises verteilt. Dies ist aber eine der vielen und wichtigen Fragen, die vom Standpunkte der Mechanik starrer Körper unbestimmt bleiben und zu deren Beantwortung die Elastizitätstheorie herangezogen werden müſste. Allgemein lassen sich bekanntlich, wo es sich um die Lagerung eines Körpers handelt, nur sechs Auflagerunbekannte aus den sechs Gleichgewichtsbedingungen der gewöhnlichen Statik im Raume bestimmen. Kommen deren mehr vor, so bleiben die übrigen *statisch unbestimmt.* Bei unserem Berührungskreise haben wir aber unendlich viele Auflagerunbekannte, weil der Auflagerdruck in jedem Elemente unseres Berührungskreises nach Gröſse und Richtung unbekannt ist. Die Frage gehört also in das Gebiet der Elastizität. Müssen wir aber erst einmal die elastischen Deformationen in Rechnung setzen, so müssen wir auch berücksichtigen, daſs der Berührungs*kreis* wegen der elastischen Abplattung der Oberflächen thatsächlich in eine Berührungs*fläche* übergehen wird. Die Gröſse dieser Fläche und die Formänderungen unserer Kegel- und Kugeloberfläche müſsten auf elastischem Wege ermittelt werden. Erst, wenn dies geschehen, könnten wir die Verteilung des

Gegendruckes und die Gröfse der Reibung angeben. Die aufserordentlichen Schwierigkeiten, welche sich hieraus ergeben, umgehen wir eben durch unsere Annahme einer absolut flachen Pfanne und einer punktförmigen Berührung.

Unter dieser Annahme ergiebt sich der Gegendruck der Pfanne oder die Reaktion $R$ derselben in vertikaler, d. h. zur Pfanne normalen Richtung durch die einfache Betrachtung, die wir pag. 515 für den auf der Horizontalebene beweglichen Kreisel anstellten. Aus dem Impulssatze folgt nämlich hier wie dort

(1) $$R = M(g + z''),$$

unter $z$ die vertikale Koordinate des Schwerpunktes in dem vom Bezugspunkte $O$ auslaufenden festen $xyz$-Koordinatensystem verstanden (vgl. Fig. 74b).

Bezüglich des Vorzeichens von $R$ ist Folgendes zu beachten: Die Pfanne kann vermöge ihrer Festigkeit zwar, wenn es nötig ist, einen aufserordentlich hohen *positiven* Gegendruck hergeben, (unter positiv die Richtung von unten nach oben verstanden), aber nicht den geringsten *negativen*. Sobald sich ein solcher im Verlauf einer bestimmten Bewegung aus (1) berechnet, würde die Pfanne nicht ausreichen, um die Ruhe des Punktes $O$ zu sichern: der Kreisel würde bei verschwindendem $R$ die Pfanne verlassen und sein unteres Ende in die Höhe schnellen. Von nun ab bewegt er sich nicht mehr wie der Kreisel mit festem Stützpunkt, sondern beschreibt eine Poinsotbewegung im freien Raume um seinen Schwerpunkt, während sich der Schwerpunkt selbst den Fallgesetzen gemäfs bewegt. Wir wollen solche Bewegungen von der Betrachtung ausschliefsen, also annehmen, dafs dauernd

$$g + z'' > 0$$

ist. Es steht mit dieser Annahme im Einklang, wenn wir späterhin sogar voraussetzen werden, dafs die Schwerpunktsbeschleunigung $z''$ dauernd sehr klein ist gegen die Fallbeschleunigung $g$, so dafs wir den Gegendruck $R$ auf seinen „statischen“ Bestandteil

(2) $$R = Mg = \text{dem Kreiselgewichte}$$

reduzieren und von dem „dynamischen Bestandteil“ $Mz''$ absehen können. Dies ist eine Vernachlässigung (**Vernachlässigung I**), die wir im Interesse der Durchführbarkeit des Reibungsproblemes machen; die Gültigkeit unserer Resultate wird dadurch auf eine Klasse von Bewegungen beschränkt, die wir als „Präcessions-ähnliche“ bezeichnen können. (Bei der regulären Präcession ist ja $z = \text{const.}$, also $z'' = 0$; Präcessionsähnlich kann daher eine Bewegung genannt werden, wenn $z''$ niemals von Null sehr verschiedene Werte annimmt.)

Zugleich mit $R$ ist auch die Reibung im Berührungspunkte $P$ bekannt. Wir unterscheiden dabei zunächst gleitende und bohrende Reibung, bemerken aber, daſs die gesonderte Berechnung beider zu Bedenken Anlaſs giebt, die im § 6 besprochen werden sollen. Für das Folgende kommen diese Bedenken nicht in Betracht, da, wie wir sehen werden, bei einigermaſsen beträchtlicher Neigung der Figurenaxe die bohrende Reibung gegenüber der gleitenden Reibung vernachlässigt werden kann.

Die gleitende Reibung ist eine im Berührungspunkte $P$ angreifende Einzelkraft von der Gröſse

$$W = \mu R, \tag{3}$$

deren Richtung horizontal ist und, ebenso wie die Bewegungsrichtung von $P$, auf der augenblicklichen Rotationsaxe $OR$ senkrecht steht (vgl. Fig. 75). Für den Bezugspunkt $O$ ergiebt sich hieraus eine Drehkraft von der Gröſse

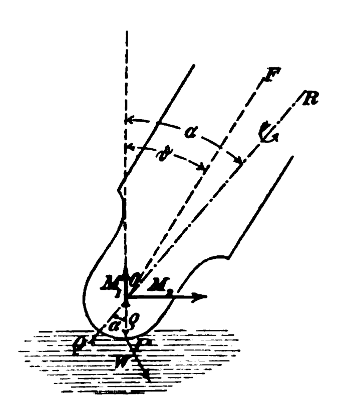


Fig. 75.

$$M_1 = \varrho \mu R, \tag{4}$$

wo $\varrho$ den Hebelarm von $W$ in Bezug auf $O$, d. i. den Radius $OP$ der begrenzenden Kugel bedeutet. Die Axe dieser Drehkraft stimmt mit der Richtung der Horizontalkomponente des Drehungsvektors überein.

Die bohrende Reibung berechnen wir durch ihr Moment $M_2$, welches die Vertikale $OP$ zur Axe hat und dem Sinne nach der Vertikalkomponente des Drehungsvektors entgegengesetzt ist. Der Gröſse nach ist (vgl. den vorigen Paragraph)

$$M_2 = \mu' R = \mu a R. \tag{5}$$

Wir wünschen uns ein Urteil darüber zu bilden, wann der eine und wann der andere Reibungseinfluſs überwiegen wird. Zu dem Zwecke berechnen wir die zugehörigen Arbeitsverluste $d\mathfrak{A}_1$ und $d\mathfrak{A}_2$ während eines Zeitintervalles $dt$. Bedeutet $\Omega$ die Gröſse der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit, $\alpha$ den Winkel zwischen der Vertikalen und dem Rotationsvektor $OR$, also $\Omega \sin \alpha$ die Horizontal-, $\Omega \cos \alpha$ die Vertikalkomponente des Drehungsvektors, so wird

$$d\mathfrak{A}_1 = - M_1 \Omega \sin \alpha \, dt, \quad d\mathfrak{A}_2 = - M_2 \Omega \cos \alpha \, dt \tag{6}$$

und

$$d\mathfrak{A}_1 : d\mathfrak{A}_2 = \varrho \sin \alpha : a \cos \alpha = \varrho \operatorname{tg} \alpha : a.$$

Die Gröſse $a$, welche im vorigen Paragraph als mittlerer Radius der Berührungsfläche gedeutet wurde, können wir entsprechend der Entstehungsweise unseres Berührungspunktes $P$ aus dem ursprünglichen Berührungskreise als Radius dieses letzteren ansprechen. Die Gröſse $\varrho \operatorname{tg} \alpha$ andrerseits bedeutet (vgl. Fig. 75) den Abstand des Berührungspunktes $P$ von dem Durchstoſsungspunkte $Q$ der augenblicklichen Rotationsaxe mit der horizontalen Pfannenoberfläche. Unsere vorstehende Proportion besagt daher, daſs die Arbeit der gleitenden Reibung kleiner oder gröſser wie die der bohrenden Reibung ist, je nachdem die augenblickliche Rotationsaxe den Berührungskreis durchsetzt oder nicht. Lassen wir den Berührungskreis nahezu in einen Punkt zusammenschrumpfen, so folgt, daſs nur bei nahezu vertikaler Lage der Rotationsaxe die bohrende Reibung neben der gleitenden in Betracht kommt, daſs dagegen bei merklich nicht vertikaler Rotationsaxe die gleitende Reibung erheblich mehr Arbeit absorbiert und daher erheblich gröſseren Einfluſs auf den Bewegungsverlauf hat. Hieraus leiten wir die Berechtigung ab, im Folgenden *die bohrende Reibung im Allgemeinen gegenüber der gleitenden Reibung zu vernachlässigen* (**Vernachlässigung II**). Da bei den zu betrachtenden Bewegungen die Figurenaxe nahezu der Rotationsaxe folgt, so wird die genannte Vernachlässigung solange zulässig sein, *als die Figurenaxe nicht merklich vertikal steht.*

Wir wollen die Arbeit der gleitenden Reibung sogleich noch auf eine zweite Weise ausdrücken, nämlich durch die Euler'schen Winkel $\varphi, \psi, \vartheta$. Wir lösen zu dem Ende den Rotationsvektor $\Omega$ in seine drei Komponenten $\varphi', \psi', \vartheta'$ nach der Figurenaxe, der Vertikalen und der Knotenlinie auf. Projizieren wir alsdann den aus den drei Seiten $\varphi', \psi', \vartheta'$ gebildeten Linienzug auf die Horizontalebene durch $O$, so ergiebt sich die Horizontalkomponente des Rotationsvektors. Dieselbe wird nach Fig. 76:

$$\Omega \sin \alpha = \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta}.$$

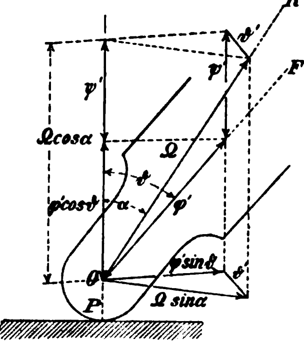


Fig. 76.

Nach (4) und (6) ergiebt sich daher

$$(7) \quad d\mathfrak{A}_1 = -\varrho \mu R \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta}\, dt.$$

Durch eine kleine formale Umänderung können wir diesen Ausdruck als lineare Funktion der Koordinatenänderungen $d\vartheta$, $d\varphi$, $d\psi$ schreiben, wie wir ihn zum Ansatz der Lagrange'schen Gleichungen brauchen werden. Wir setzen nämlich (7) so um:

$$(8) \qquad d\mathfrak{A}_1 = -\varrho\mu R\left(\frac{\vartheta'\,d\vartheta}{\sqrt{\vartheta'^2+\varphi'^2\sin^2\vartheta}} + \frac{\varphi'\sin^2\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{\vartheta'^2+\varphi'^2\sin^2\vartheta}}\right).$$

Die Koeffizienten von $d\vartheta$, $d\varphi$, $d\psi$ in diesem Ausdruck nennen wir (vgl. z. B. pag. 78) die „Komponenten der gleitenden Reibung im Sinne der Koordinaten $\vartheta$, $\varphi$, $\psi$" und schreiben:

$$(9) \quad \Theta_1 = -\varrho\mu R\frac{\vartheta'}{\sqrt{\vartheta'^2+\varphi'^2\sin^2\vartheta}}, \quad \Phi_1 = -\varrho\mu R\frac{\varphi'\sin^2\vartheta}{\sqrt{\vartheta'^2+\varphi'^2\sin^2\vartheta}}, \quad \Psi_1 = 0.$$

Bezüglich der Gröſse dieser Reibungskomponenten werden wir uns ebenfalls eine Ungenauigkeit zu Schulden kommen lassen (**Vernachlässigung III**). Bei den wichtigsten Kreiselbewegungen fällt der Rotationsvektor immer nahezu mit der Figurenaxe zusammen. Es wird also die Komponente $\varphi'$ des Rotationsvektors nach der Figurenaxe erheblich gröſser wie die Komponente $\vartheta'$ nach der Knotenlinie. Bei der regulären Präcession wird sogar unter Absehung von der Reibung $\vartheta'$ genau gleich Null. Indem wir also festsetzen, *daſs in den Ausdrücken der Reibungsarbeit und der Reibungskräfte $\vartheta'$ gegen $\varphi'$ gestrichen werden soll,* beschränken wir unsere Betrachtung abermals auf die „Präcessions-ähnlichen Bewegungen".

In diesem Sinne schreiben wir (7) und (9)

$$(10) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{A}_1 = \mp\,\varrho\mu R\varphi'\sin\vartheta\,dt, \\ \Phi_1 = \mp\,\varrho\mu R\sin\vartheta, \quad \Psi_1 = \Theta_1 = 0. \end{cases}$$

Einer Erläuterung bedarf hierbei noch das doppelte Vorzeichen in (10). Es ist klar, daſs die Quadratwurzel in Gl. (7) stets mit dem positiven Zeichen zu rechnen ist, da die Reibungsarbeit stets negativ ist. Dasselbe gilt von den Quadratwurzeln in Gl. (8) und (9). Entwickeln wir diese Wurzeln nach $\vartheta'/\varphi'$, so haben wir sie in erster Näherung gleich $|\varphi'\sin\vartheta|$, d. h. gleich $\pm\,\varphi'\sin\vartheta$ zu setzen, je nachdem $\varphi'$ selbst positiv oder negativ ist. Dies gilt insbesondere auch für den Wert von $\Phi_1$, in dem wir den Nenner $|\varphi'\sin\vartheta|$ gegen Faktoren des Zählers $\varphi'\sin^2\vartheta$ gehoben haben. Das obere Vorzeichen in den Gl. (10) ist also in denjenigen Fällen zu wählen, wo der Kreisel um die Figurenaxe im Sinne des Uhrzeigers rotiert ($\varphi' > 0$, Fig. 77a), das untere im entgegengesetzten Falle ($\varphi' < 0$, Fig. 77b).

Wir haben jetzt alle Vorbereitungen zur angenäherten Lösung des Reibungsproblemes getroffen, die uns im nächsten Paragraphen beschäftigen soll. Namentlich werden wir uns dabei von der aus der Beobachtung wohlbekannten Thatsache Rechenschaft zu geben haben, daſs die Figurenaxe des Kreisels durch die gleitende Reibung im Mittel langsam aufgerichtet wird.

Es wird aber gut sein, eben diese Thatsache schon vorher auf einem wenn auch sehr ungenauen Wege plausibel zu machen, der uns die Wirkung der Reibung rein anschaulich zu verfolgen erlaubt.

Wir nehmen an, der Kreisel befinde sich in schneller Rotation und die Rotationsaxe falle nahezu mit der Figurenaxe zusammen. Ein gleiches gilt dann auch von der Impulsaxe, deren Lage sich ja aus der Lage von Figurenaxe und Rotationsaxe bestimmt. Wir haben also zur Versinnlichung des Impulses von $O$ aus einen sehr langen Vektor $OJ$ abzutragen, und zwar ungefähr in der Richtung der positiven Figurenaxe, d. h. nach oben hin, oder in der ungefähren Richtung der negativen Figurenaxe, d. h. nach unten hin verlaufend, je nachdem die Rotation des Kreisels im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten Sinne um die positive Figurenaxe erfolgt. Die Rotation selbst wird durch einen Vektor $OR$ dargestellt, welcher annähernd ebenso wie der Impuls gerichtet ist, also das eine Mal nach oben, das andere Mal nach unten. Den ersten Fall stellt Fig. 77a, den zweiten 77b dar. Der Einfluſs der gleitenden Reibung auf die Kreiselbewegung äuſsert sich, wie wir sahen, in dem Auftreten eines Momentes $M_1$, welches dieselbe Axe wie die Horizontalkomponente des Rotationsvektors und den entgegengesetzten Sinn hat. Tragen wir also die Horizontalkomponente $OH$ des Rotationsvektors in unseren beiden Figuren ein, so ist dadurch der Sinn des Reibungsmomentes bestimmt. Der fragliche Pfeil, welcher $M_1$ darstellt, muſs in Fig. 77a von rechts nach links, in 77b von links nach rechts verlaufen.

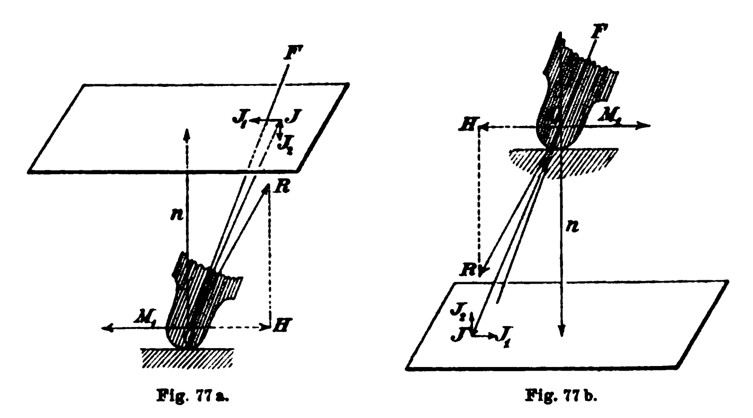



Fig. 77a. Fig. 77b.

Nach den fundamentalen Eigenschaften des Impulsvektors setzt sich nun dieser in jedem Zeitteilchen $dt$ mit dem Zusatzimpuls der äuſseren Kräfte zusammen. Soweit letzterer von der gleitenden Reibung herrührt, ist er gleich $M_1 dt$; das Resultat seiner Zusammensetzung

mit dem Impulsvektor $OJ$ ist in den beiden Figuren angedeutet. In beiden Fällen besteht die Wirkung des Zusatzimpulses darin, daſs die Horizontalkomponente des Gesamtimpulses etwas verkleinert wird, die Vertikalkomponente ungeändert bleibt. *Der Gröſse nach wird also der Impuls etwas geschwächt, der Richtung nach etwas mehr vertikal gestellt. Sein Endpunkt wandert dabei in der durch den Endpunkt des Anfangsimpulses gelegten Horizontalebene von $J$ nach $J_1$.*

Der Einfluſs der Reibung auf die Richtungsänderung des Impulsvektors wird offenbar um so geringer sein, je gröſser die jeweilige Länge des Impulsvektors ist; denn die Hinzufügung der kleinen Strecke $JJ_1$, welche nur von der Gröſse des Gegendruckes $R$, vom Reibungskoeffizienten $\mu$, dem Kugelradius $\varrho$ und dem Zeitelement $dt$ abhängt, macht gegenüber einem langen Vektor $OJ$ weniger aus wie gegenüber einem kürzeren. *Die Umlagerung des Impulsvektors erfolgt also um so langsamer, je stärker der Anfangsimpuls war oder je schneller der Kreisel ursprünglich rotierte.*

Natürlich wird der Impulsvektor $OJ$ gleichzeitig auch durch die Einwirkung der Schwere abgeändert. Aus diesem Grunde verschiebt sich der Endpunkt des Impulses in jedem Augenblicke im Sinne der Axe des Schweremomentes, d. h. im Sinne der Knotenlinie. Da aber die Knotenlinie auf der Figurenaxe genau und auf der Impulsaxe angenähert senkrecht steht, solange unsere Voraussetzung des angenäherten Zusammenfallens von Figuren- und Impulsaxe zutrifft, bringt die Schwerewirkung angenähert keine Änderung in der Gröſse und Neigung des Impulsvektors gegen die Vertikale hervor. Da überdies die Knotenlinie auf der Vertikalen genau senkrecht steht, tritt der Impuls-Endpunkt auch wegen der Schwerewirkung nicht aus der genannten festen Horizontalebene heraus. Unsere obigen Behauptungen bezüglich der Gröſsen- und Lagenänderungen des Impulses bleiben also auch bei Berücksichtigung der Schwerewirkung bestehen. Man bemerke insbesondere, daſs der Sinn des Schweremomentes, welches von der Lage des Schwerpunktes auf der Figurenaxe abhängt, für unsere Überlegung belanglos ist. *Der Impulsvektor wird also je länger je mehr durch die Reibung aufgerichtet, gleichviel ob der Schwerpunkt oberhalb oder unterhalb des Unterstützungspunktes liegt.*

Wir möchten nun aber zeigen — und erst mit diesem Nachweis erreichen wir unsern eigentlichen Zielpunkt —, daſs sich ebenso wie die Impulsaxe auch die Figurenaxe des Kreisels verhält.

Zu dem Ende bemerken wir, daſs zunächst die *Rotationsaxe* bei dem Kugelkreisel genau, bei dem symmetrischen Kreisel angenähert der Lage der Impulsaxe folgen wird. Die Figurenaxe andrerseits wird

fortgesetzt um die jeweilige Rotationsaxe auf einem Kegel umgedreht. Und zwar geht bei hinreichend starkem Eigenimpuls diese Umdrehung viel schneller vor sich, wie der Wechsel der Rotationsaxe selbst, derart, daſs während einer vollen Umdrehung der Figurenaxe sich die Rotationsaxe nur wenig verschoben hat. In der That wird die Bewegung der Impulsaxe und daher auch die der Rotationsaxe um so langsamer, je gröſser der dem Kreisel ursprünglich erteilte Impuls war, während die Umdrehung der Figurenaxe um so schneller wird, je gröſser jener Impuls ist. Von einer gewissen Gröſse des Impulses ab wird also die Bewegung der Rotationsaxe als unendlich langsam gegenüber der Bewegung der Figurenaxe gelten können. Alsdann fällt die mittlere Lage der Figurenaxe dauernd mit der Lage der Rotationsaxe zusammen und es gilt von ihr dasselbe, was für die Lage der Rotationsaxe und der Impulsaxe bereits festgestellt wurde: *Im Mittel muſs sich auch die Figurenaxe unter der Einwirkung der Reibung aufrichten, und zwar um so langsamer, je schneller die anfängliche Rotation war.* Dieser mittleren Bewegung werden sich kleine Schwankungen oder Nutationen der Figurenaxe überlagern, die von der fortgesetzten Umdrehung um die Rotationsaxe herrühren und die die Figurenaxe abwechselnd der Vertikalen nähern und von ihr entfernen. —

Daſs die Reibung ein Aufrichten der Figurenaxe auch dann zur Folge hat, wenn der Schwerpunkt oberhalb des Stützpunktes liegt, und daher mit der Hebung der Figurenaxe eine Arbeitsleistung verbunden ist, kann vielleicht auf den ersten Blick überraschen. Denn die Reibung kann doch stets nur Arbeit verzehren und keine Arbeit leisten. In Wirklichkeit liegt natürlich die Sache so, daſs die zur Schwerpunktshebung erforderliche Energie aus der lebendigen Kraft des Kreisels bestritten wird, von der auch die Reibung zehrt. Die Verkürzung des Impulsvektors, welche eine Verminderung der lebendigen Kraft zur Folge hat, bildet daher, falls der Schwerpunkt oberhalb des Stützpunktes liegt, ein notwendiges Korrelat zur Aufrichtung des Impulsvektors und zu der der Figurenaxe.

Das Endergebnis der gleitenden Reibung ist somit die *aufrechte Kreiselbewegung.* Der zu dieser Bewegung verfügbar bleibende Impuls ist durch die anfängliche Vertikalkomponente $n$ des Impulsvektors gegeben, durch welche sich auch die gleichförmige Rotationsgeschwindigkeit bei der aufrechten Bewegung vorausbestimmt. Nachdem einmal Impuls-, Rotations- und Figurenaxe in der senkrechten Lage zusammengefallen sind, ist die gleitende Reibung auſser Thätigkeit gesetzt: der Kreisel könnte unserm bisherigen Ansatz zufolge in dieser Lage ungeschwächt für alle Zeit fortrotieren.

Letzteres widerspricht aber offenbar der gemeinen Erfahrung, wonach jede Bewegung durch Reibungseinflüsse schlieſslich definitiv vernichtet wird. In der That ist jenes Ergebnis auch nur eine Folge der willkürlichen Unterscheidung zwischen gleitender und bohrender Reibung und der Vernachlässigung der letzteren. Wir müssen uns daher jetzt noch ein ungefähres Urteil über *die Wirkung der bohrenden Reibung* verschaffen.

Nach dem obigen vorläufigen Ansatz liefert die bohrende Reibung ein Moment, welches der Vertikalkomponente des Rotationsvektors entgegenwirkt. Im Falle von Fig. 77a (Rotation im Sinne des Uhrzeigers um die Figurenaxe) ist der Rotationsvektor nach oben gerichtet, also würde das Drehmoment $M_2$ der bohrenden Reibung durch einen Pfeil darzustellen sein, der von $O$ aus nach unten läuft. Dieses Drehmoment setzt sich ebenso wie das Drehmoment der gleitenden Reibung in jedem Augenblicke mit dem vorhandenen Impuls $OJ$ zusammen. Hierbei wird, wie man sieht, der Impulsvektor *von der Vertikalen abgelenkt,* indem sein Endpunkt etwa von $J$ nach $J_2$ verlagert wird.

Das gleiche gilt aber auch im Falle der Fig. 77b, wo der Pfeil des Drehmomentes $M_2$ nach oben weisen würde und der Impuls bei der Zusammensetzung mit $M_2$ gehoben wird. Sein Endpunkt wandert dabei etwa von $J$ nach $J_2$. In beiden Fällen ist die Umlagerung des Impulses zufolge der bohrenden Reibung mit einer *Verkürzung des Impulses* verbunden.

Die bohrende Reibung arbeitet also in einer Hinsicht der gleitenden Reibung entgegen: *sie strebt den Impulsvektor von der Vertikalen zu entfernen.* In anderer Hinsicht wirkt sie in gleichem Sinne wie die gleitende Reibung: *sie schwächt den Impuls dauernd.* Da wir sahen, daſs der Einfluſs der bohrenden Reibung, solange die Rotationsaxe merklich von der Vertikalen verschieden ist, klein gegenüber dem Einfluſs der gleitenden Reibung ist, so wird dieser letztere jedenfalls den Ausschlag geben und es wird trotz der bohrenden Reibung ein Aufrichten der Figurenaxe erfolgen. Höchstens könnte das Zeitmaſs des Aufrichtens durch den Einfluſs der bohrenden Reibung etwas verzögert werden. Andrerseits ist zu beachten, daſs das Aufrichten um so schneller erfolgt, je kürzer der Impulsvektor ist, daſs also die bohrende Reibung, indem sie die Länge des Impulsvektors reduziert, ihrerseits das Aufrichten indirekt beschleunigt. Diese indirekte Wirkung der bohrenden Reibung wird daher ihre direkte Wirkung, den Impulsvektor von der Vertikalen abzulenken, teilweise kompensieren.

Ist aber die aufrechte Lage annähernd erreicht, so tritt die bohrende Reibung als die Hauptsache in ihr Recht, weil alsdann die gleitende

Reibung sehr klein geworden ist. Durch die bohrende Reibung wird der nunmehr vertikal gestellte Impuls dauernd weiter geschwächt, ohne dafs der Charakter der aufrechten Bewegung zunächst wesentlich geändert wird. Die Rotationsgeschwindigkeit der aufrechten Bewegung, die vermöge der gleitenden Reibung unverändert fortbestehen könnte, wird also durch die bohrende Reibung mehr und mehr herabgesetzt. Schliefslich mufs der Impuls bis auf diejenige Gröfse reduziert sein, bei welcher die aufrechte Bewegung instabil wird, wenn der Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkte liegt. Jede kleinste Störung erzeugt jetzt merkliche Schwankungen der Figurenaxe, die bei weiter abnehmendem Impuls ihrer Amplitude nach zunehmen, bis der Kreisel umfällt und nach einigen scheinbar regellosen letzten Anstrengungen definitiv zur Ruhe kommt.

## § 4. Quantitatives über den Einflufs der gleitenden Reibung auf die Neigung der Figurenaxe. Graphische Integration der zugehörigen Differentialgleichung.

Die geeignetste Grundlage für eine eingehendere Behandlung unseres Reibungsproblems liefern die Gleichungen von Lagrange in den Eulerschen Winkeln $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$. Neben den Geschwindigkeitskoordinaten $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ werden wir die Impulskoordinaten $[\Phi] = N$, $[\Psi] = n$, $[\Theta]$ benutzen. Bei Übernahme der Bezeichnung $N$, die früher als Integrationskonstante eingeführt wurde, ist zu beachten, dafs diese Impulskoordinate jetzt nicht mehr konstant ist, sondern durch die gleitende Reibung stetig abgeändert wird, wie denn bei Berücksichtigung der bohrenden Reibung auch die Impulskoordinate $n$ variabel werden würde. Die auf den Kreisel wirkenden Kräfte bestehen aus der Schwere und der gleitenden Reibung, wenn wir (Vernachlässigung II) von der bohrenden Reibung absehen. Die Schwere giebt nur um die Knotenlinie, die gleitende Reibung auf Grund unserer Vernachlässigung III (s. die Gl. (10) des vorigen §) nur um die Figurenaxe zu einem Momente Anlafs. Die Koordinaten der äufseren Kraft, bezüglich der drei Euler'schen Winkel, werden daher durch die folgende Tabelle gegeben:

| | $\varphi$ | $\psi$ | $\vartheta$ |
|---|---|---|---|
| Schwere | 0 | 0 | $P \sin \vartheta$ |
| Gl. Reibung | $\mp \varrho\mu\, Mg \sin \vartheta$ | 0 | 0 |

Hierbei ist auch bereits von der Vernachlässigung I Gebrauch gemacht, indem der Gegendruck mit seinem statischen Bestandteil $Mg$ identifiziert wurde.

Die Grundgleichungen, von denen wir auszugehen haben, sind in ganz ähnlicher Form schon pag. 154 und pag. 220 u. ff. entwickelt worden; sie lauten:

a) Der Ausdruck der lebendigen Kraft des symmetrischen Kreisels:

$$T = \frac{A}{2}(\sin^2\vartheta\,\psi'^2 + \vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')^2. \tag{1}$$

b) Der Zusammenhang zwischen Impuls- und Geschwindigkeitskoordinaten:

$$\left\{\begin{aligned} [\Phi] &= N = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi'), \\ [\Psi] &= n = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A\sin^2\vartheta\,\psi' + C\cos\vartheta\,(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi'), \\ [\Theta] &\phantom{= n} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = A\vartheta'. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

c) Die Auflösung der beiden ersten der vorstehenden Gleichungen nach den Geschwindigkeitskoordinaten:

$$\psi' = \frac{n - \cos\vartheta\,N}{A\sin^2\vartheta}, \quad \varphi' = \frac{N - \cos\vartheta\,n}{A\sin^2\vartheta} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)N. \tag{3}$$

d) Der partielle Differentialquotient der lebendigen Kraft nach der Koordinate $\vartheta$:

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = A(\cos\vartheta\,\psi' - N)\sin\vartheta\,\psi' = -\frac{(N - \cos\vartheta\,n)(n - \cos\vartheta\,N)}{A\sin^3\vartheta}. \tag{4}$$

e) Das Gesetz für die Impulsänderungen oder die Lagrange'schen Gleichungen im engeren Sinne:

$$\frac{dn}{dt} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{dN}{dt} = \mp\,\varrho\mu\,Mg\sin\vartheta, \tag{6}$$

$$A\vartheta'' + \frac{(N - \cos\vartheta\,n)(n - \cos\vartheta\,N)}{A\sin^3\vartheta} = P\sin\vartheta. \tag{7}$$

Statt der Gleichung (7) haben wir beim reibungslosen Kreisel den Satz der lebendigen Kraft benutzt, der sich dadurch empfahl, daſs er die Ausführung einer Integration in sich schloſs. Im vorliegenden Falle geht dieser Vorteil verloren, weil der Reibungswiderstand keine konservative Kraft ist, und wird daher die Gleichung (7) wegen ihrer einfacheren Bauart bequemer als jener Satz.

Wir wollen die Bedeutung der letzten drei Gleichungen der Reihe nach durchgehen.

Gleichung (5) sagt aus, *daſs die Vertikalkomponente des Impulses durch die gleitende Reibung nicht beeinfluſst wird,* wie wir schon im

vorigen Paragraph erkannten. $n$ kann daher nach wie vor als eine durch den Anfangszustand gegebene Integrationskonstante angesehen werden. Übrigens folgt dieses Resultat allein aus unserer Vernachlässigung II der bohrenden Reibung und ist von der Einführung oder Nichteinführung der Vernachlässigungen I und III unabhängig.

Aus Gl. (6) schliefsen wir, *dafs sich der Absolutwert des Eigenimpulses $N$ dauernd im gleichen, nämlich im abnehmenden Sinne ändert.* Wegen der Bedeutung des doppelten Vorzeichens (vgl. pag. 552) berechnet sich nämlich für $dN$ aus Gl. (6) ein negativer oder positiver Wert, je nachdem $\varphi'$ oder, was auf dasselbe herauskommen wird, je nachdem $N$ positiv oder negativ ist. Die Gröfse von $N$ können wir hiernach als eine Art Zeitmesser benutzen, da wir den Ablauf der Bewegung ebensowohl auf die abnehmenden Werte von $|N|$ wie auf die wachsenden Werte von $t$ beziehen können. Mit anderen Worten: *wir können statt der Zeit $t$ die Gröfse $N$ als unabhängige Variable einführen.* Ist die wechselnde Lage des Kreisels, insbesondere der Winkel $\vartheta$, als Funktion von $N$ bekannt, so läfst sich der zeitliche Verlauf der Bewegung nachträglich feststellen, indem man nach (6) berechnet:

$$t = \mp \frac{1}{Mg\mu\varrho} \int \frac{dN}{\sin\vartheta}. \tag{8}$$

In Gl. (7) kommen zunächst drei Veränderliche vor, nämlich $t$, $N$ und $\vartheta$. Statt $\vartheta$ führen wir wie früher die Hülfsgröfse

$$u = \cos\vartheta \tag{9}$$

ein, überdies eliminieren wir die Variable $t$ mittels der Gl. (6) und benutzen nach der vorstehenden Bemerkung fernerhin $N$ als unabhängige Variable. Zu dem Ende ist es nur nötig, die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten von $\vartheta$ durch solche nach $N$ zu ersetzen. Wir haben:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{d\vartheta}{dN}\cdot\frac{dN}{dt} = \mp \varrho\mu\, Mg \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dN} = \pm \varrho\mu\, Mg \frac{du}{dN}, \\ \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= \pm \varrho\mu\, Mg \frac{d^2u}{dN^2}\cdot\frac{dN}{dt} = -(\varrho\mu\, Mg)^2 \frac{d^2u}{dN^2} \sin\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Gl. (7) läfst sich daher mit Rücksicht auf (9) und (10) in die folgende bemerkenswert einfache Form schreiben:

$$(\varrho\mu\, Mg)^2 \frac{d^2u}{dN^2} = \frac{(N-un)(n-uN)}{A^2(1-u^2)^2} - \frac{P}{A}. \tag{11}$$

*Das Problem ist somit auf eine einzelne gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen $u$ und $N$ reduziert.*

Wir beabsichtigen nicht, diese Gleichung in geschlossener Form oder durch irgend welche Reihenentwicklung zu integrieren. Vielmehr

werden wir versuchen, auch ohne formelmäſsige Integration durch sachgemäſse Diskussion der Differentialgleichung das Wesentliche über den Verlauf der Integralkurve zu erfahren.

Da die Gestalt der Integralkurve wesentlich von ihrer Krümmung und diese von dem zweiten Differentialquotienten abhängt, so werden wir darauf geführt, die rechte Seite von (11) näher zu studieren. Und zwar werden wir zunächst feststellen, wo die rechte Seite einen Vorzeichenwechsel aufweist. Zu dem Zwecke betrachten wir die Gleichung:

$$(12) \qquad (n - uN)(N - un) - AP(1 - u^2)^2 = 0.$$

Hier ist es noch bequem, mit dem Quadrat der Impulskonstanten $n$ zu dividieren und die Abkürzungen

$$(13) \qquad v = \frac{N}{n}, \quad \pm m^2 = \frac{AP}{n^2}$$

einzuführen. Die Gröſse $v$ ist dann, ebenso wie der Neigungscosinus $u$, eine reine Zahl. Das Gleiche gilt nach pag. 293 von der Gröſse $\pm m^2$, wobei das positive oder negative Vorzeichen zu wählen sein wird, je nachdem $P$ positiv oder negativ ist, der Schwerpunkt also über oder unter dem Stützpunkte liegt. Unsere Gleichung (12) verwandelt sich so in eine Gleichung zwischen den drei unbenannten Zahlengröſsen $u$, $v$ und $m^2$, nämlich in:

$$(14) \qquad (1 - uv)(v - u) = \pm m^2 (1 - u^2)^2.$$

Wir deuten $u$ als Ordinate, $v$ als Abscisse in einer $u, v$-Ebene; die durch (14) dargestellte, in dieser Ebene verlaufende Kurve vierter Ordnung bezeichnen wir als *Leitlinie*, da sie der später zu konstruierenden Integralkurve gewissermaſsen als Führung dienen wird. Die Integralkurve der Gl. (11) muſs sich, wie wir zeigen werden, um unsere Leitlinie in unmittelbarer Umgebung derselben herumschlängeln.

Die Gestalt der Leitlinie ist in Fig. 78 dargestellt; und zwar bezieht sich die ausgezogene Linie auf den Fall $P > 0$, wo in (14) das positive Zeichen gilt, die punktierte Linie auf den Fall $P < 0$, in welchem $m^2$ mit dem negativen Vorzeichen versehen ist. Wie Gl. (14) zeigt, entsteht die letztere aus der ersteren, wenn man $u$, $v$ mit $-u$, $-v$ vertauscht, wenn man also die erstere Linie um den Anfangspunkt der $u, v$-Ebene durch den Winkel von $180^0$ dreht. Hiernach genügt es, den Fall $P > 0$ allein zu betrachten, also in Gl. (14) lediglich das obere Vorzeichen zu berücksichtigen.

Zur Begründung unserer Figur 78 sei folgendes bemerkt: Konstruiert man die gleichseitige Hyperbel $1 = uv$ und die Gerade $v = u$, so teilen diese die Ebene in sechs Gebiete; in dreien derselben hat die linke Seite von (14) positives, in den übrigen negatives Vorzeichen.

Nur in den ersteren Gebieten, die in der Figur durch Schraffierung kenntlich gemacht sind, kann unsere Leitlinie verlaufen, da sonst Gl. (14) nicht erfüllbar wäre.

Ferner ist es für die Gestalt der Leitlinie wesentlich, dafs wir $m^2$ als *kleine Zahl* voraussetzen dürfen. Denn wir betrachten nur Be-

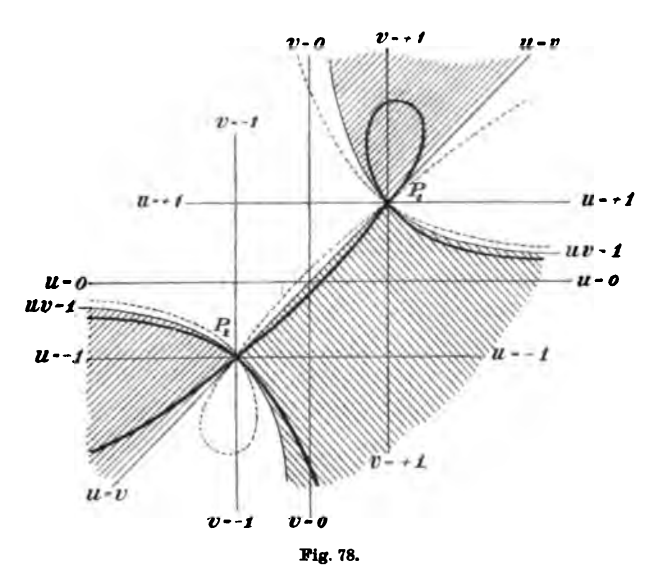


Fig. 78.

wegungen, bei welchen dem Kreisel anfänglich eine schnelle Umdrehung oder ein starker Impuls erteilt wurde. Unter einem starken Impuls verstehen wir aber nach pag. 293 einen solchen, für den $N^2$ erheblich gröfser als die gleichbenannte Gröfse $AP$, für den also $AP/N^2$ ein kleiner echter Bruch $\left(\text{beispielsweise} < \frac{1}{100}\right)$ ist. Da nun die Vertikalkomponente $n$ des Impulses von derselben Gröfsenordnung wie der Anfangswert des Eigenimpulses ist, so wird auch $AP/n^2 = m^2$ ein kleiner echter Bruch. In der Figur haben wir nur $m^2 = 1/9$ gewählt, weil bei noch kleinerem $m^2$ unsere Zeichnung undeutlich würde, während wir für die Zwecke der späteren Rechnung an der Annahme $m^2 < \frac{1}{100}$ festhalten werden.

Man überzeugt sich sodann nach der üblichen Methode der Potenzentwicklung leicht, dafs die Punkte $P_1$ $(u = v = 1)$ und $P_2$ $(u = v = -1)$ Doppelpunkte unserer Kurve werden und dafs die beiden Kurventangenten in diesen Punkten mit der positiven bezw. negativen Abscissenaxe einen Winkel $\alpha$ einschliefsen, der sich aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 - 4m^2}} \quad (\text{Punkt } P_1)$$

bezw. aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{1+4m^2}} \text{ (Punkt } P_2)$$

berechnet. Im Punkte $P_1$ ist der genannte Winkel also ein wenig gröſser, in $P_2$ ein wenig kleiner wie $45^0$.

Aus Gl. (14) folgt ferner leicht, daſs unsere Leitlinie eine und nur eine zur $v$-Axe parallele Tangente mit dem Berührungspunkte

$$u = \frac{1}{4m^2}, \quad v = \frac{1}{2}\left(4m^2 + \frac{1}{4m^2}\right)$$

besitzt. Hieraus ist zu schlieſsen, daſs die beiden durch $P_1$ nach oben hin verlaufenden Kurvenäste sich in einer Schlinge vereinigen. Die beiden durch $P_2$ nach links auslaufenden Äste können sich dagegen nicht zusammenschlieſsen, da der obere von ihnen sich asymptotisch der Abscissenaxe annähert. Das gleiche gilt von dem durch $P_1$ nach unten rechts verlaufenden Aste.

Durch diese und ähnliche Betrachtungen läſst sich die Gestalt unserer Leitlinie mit hinreichender Sicherheit im Falle $P > 0$ feststellen. Ihre Gestalt im Falle $P < 0$ wird dann durch die schon erwähnte Umdrehung aus jener abgeleitet.

Welchen Nutzen gewährt uns nun die Kenntnis der Leitlinie für die Integration der Gleichung (11)? Wir schreiben uns diese Gleichung zunächst so um, daſs darin lauter unbenannte Gröſsen vorkommen. Zu dem Zwecke dividieren wir sie mit $n^2/A^2$ und ersetzen

$$\frac{d^2u}{dN^2} \text{ durch } \frac{1}{n^2}\frac{d^2u}{dv^2}.$$

Der Faktor von $\frac{d^2u}{dv^2}$ wird auf solche Weise, wenn wir die übliche Abkürzung $P = \pm MgE$ einführen:

$$\frac{A^2}{n^4}(Mg\mu\varrho)^2 = \left(\frac{AP}{n^2}\mu\frac{\varrho}{E}\right)^2 = (m^2\mu\lambda)^2$$

mit der weiteren Abkürzung

$$\lambda = \frac{\varrho}{E}$$

und unsere Gleichung (11) geht über in

$$(15) \qquad (m^2\mu\lambda)^2\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{(1-uv)(v-u)}{(1-u^2)^2} - m^2 \cdots (P>0)$$

bez. in

$$(16) \qquad (m^2\mu\lambda)^2\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{(1-uv)(v-u)}{(1-u^2)^2} + m^2 \cdots (P<0).$$

Nun verschwindet die rechte Seite jeder dieser Gleichungen nur in den Punkten der zugehörigen Leitlinie und es tritt daher ein Wechsel im Sinne der Krümmung unserer Integralkurve nur ein, wenn diese

die Leitlinie überschreitet. Wegen der Bedeutung von $u = \cos\vartheta$ brauchen wir nur denjenigen Streifen der $u, v$-Ebene zu betrachten, der zwischen den Geraden $u = \pm 1$ enthalten ist; dieser wird von der Leitlinie in vier Gebiete eingeteilt. Das jedem Gebiete zukommende Vorzeichen von $d^2u/dv^2$ ist in den Figuren 79 und 80 eingetragen; man stellt es am einfachsten dadurch fest, dafs man von dem Punkte $u = v = 0$ ausgeht, in welchem die rechte Seite von (15) gleich $-m^2$, die von (16) gleich $+m^2$ wird. Hierdurch ist das fragliche Vorzeichen für jeden Punkt unseres Streifens bestimmt. *In den mit + bezeichneten Gebieten ist die gesuchte Integralkurve, aus der Richtung der positiven Ordinatenaxe betrachtet, konkav gekrümmt, in den mit − bezeichneten Gebieten konvex; beim Überschreiten der Leitlinie besitzt sie jedesmal einen Wendepunkt.*

Um von hieraus die Integralkurve wirklich konstruieren zu können, müssen wir uns zunächst bestimmte Anfangsbedingungen geben. Wir bezeichnen den anfänglichen Neigungscosinus der Figurenaxe gegen die Vertikale mit $u_0$ und setzen etwa fest, dafs zu Beginn der Impulsvektor genau in die Richtung der Figurenaxe falle, dafs also der Kreisel zu Beginn keinen seitlichen Anstofs erhalte. Dann gibt der Anfangswert $N_0$ des Eigenimpulses zugleich die Gesamtlänge des Impulsvektors und es ist die Vertikalkomponente des Impulses $n = N_0 u_0$. Unsere Integralkurve beginnt daher in einem Punkte $P_0$, dessen Koordinaten $u_0, v_0$ der Gleichung $1 = u_0 v_0$ genügen, welcher also auf der (in Fig. 79 und 80 gestrichelt eingezeichneten) gleichseitigen Hyperbel liegt. Ferner ist hierdurch zugleich die Anfangstangente der Integralkurve bestimmt; wenn nämlich der Impulsvektor die Richtung der Figurenaxe hat, so fällt auch die augenblickliche Rotationsaxe in die Figurenaxe hinein. Die Figurenaxe steht also momentan im Raume still und es ist

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{und daher auch} \quad \frac{du}{dN} = 0 \quad \text{sowie} \quad \frac{du}{dv} = 0.$$

Unsere Integralkurve setzt also im Punkte $P_0$ mit einer horizontalen Tangente ein.

Von dem weiteren Verlauf der Integralkurve gilt die allgemeine Bemerkung: *dafs sie, auf die Abscissenaxe senkrecht projiziert, diese überall einfach überdecken mufs.* Denn, wie oben festgestellt, nimmt der Absolutwert von $N$ mit wachsendem $t$ beständig ab, desgleichen der (notwendig positive) Wert von $v = \frac{N}{n}$. Da nun zu jedem Werte von $t$ nur ein Wert von $u$ gehören kann, so kann auch jedem Werte von $v$ nur ein Wert von $u$ entsprechen.

Betrachten wir nun z. B. Fig. 79 ($P > 0$). Der Anfangspunkt $P_0$ liegt in einem Gebiete negativer Krümmung (d. h. einem Gebiete, wo

$d^2u/dv^2 < 0$); die Integralkurve ist also von oben gesehen konvex Da sie in $P_0$ eine horizontale Tangente hat, muſs sie nach unten umbiegen und bald zum Schnitt mit der Leitlinie kommen. Hierbei geht sie mit einer Wendung in ein Gebiet positiver Krümmung über, verläuft also von jetzt ab nach oben hin konkav. Die zwei Möglichkeiten,

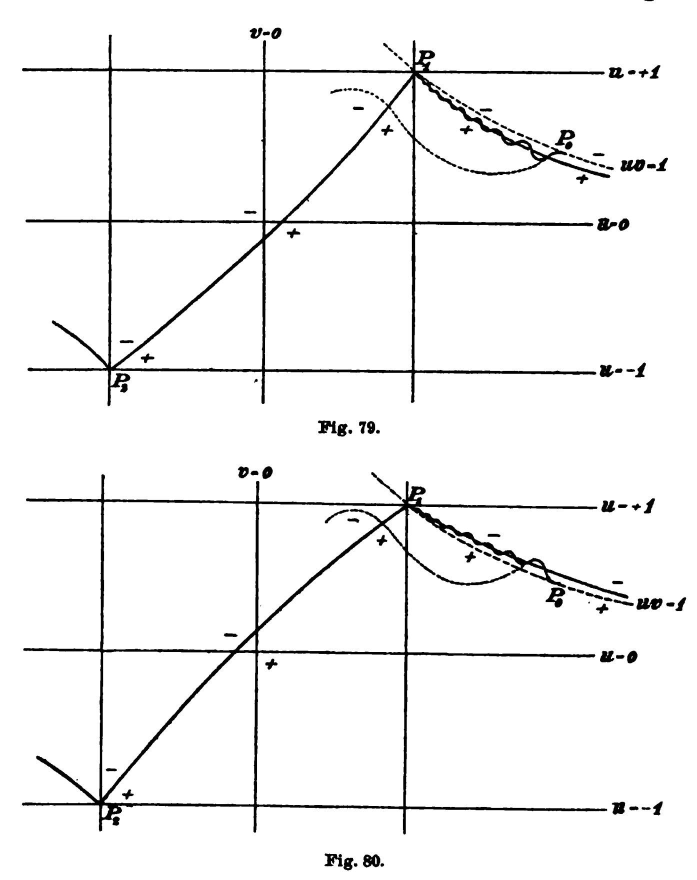



Fig. 79.

Fig. 80.

die sich nun bieten, sind in Fig. 79 angedeutet: Die Integralkurve muſs die Leitlinie zum zweiten Mal schneiden; dieser Schnittpunkt kann nun entweder, von $P_0$ aus gerechnet, diesseits von $P_1$ liegen, oder jenseits. Die in der Figur ausgezogene, wellenförmige Gestalt der Integralkurve entspricht der ersten, die punktierte Gestalt der zweiten Möglichkeit. *Wir wollen zeigen, daſs nur die erste Möglichkeit der Wirklichkeit entspricht.*

Zum Beweise haben wir auſser dem Vorzeichen der Krümmung deren Gröſse zu beachten. Letztere ist in rechtwinkligen Koordinaten $u$, $v$ bekanntlich durch den Ausdruck

$$\text{a)}\quad \frac{\dfrac{d^2u}{dv^2}}{\left(1+\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2\right)^{3/2}}$$

gegeben. Wir werden statt dessen als einen angenäherten Ausdruck für die Krümmung den folgenden

$$\text{b)}\quad \frac{d^2u}{dv^2}$$

substituieren, dessen jeweiligen Betrag wir direkt aus der Differentialgleichung (19) entnehmen können. Dieser Wert ist allerdings etwas zu grofs und stimmt nur dann mit dem genauen Wert der Krümmung hinreichend überein, wenn die Neigung der Kurventangente gegen die Abscissenaxe klein ist. Dafs dieses in unserem Falle zutrifft, können wir nicht mit Sicherheit behaupten; nur soviel ist nach einer Bemerkung auf der vorigen Seite klar, dafs die Neigung der Kurventangente niemals unendlich grofs werden kann; denn dann würde die Projektion der Integralkurve auf die Abscissenaxe diese nicht mehr eindeutig überdecken.

Auf der Leitlinie selbst hat wie wir wissen die Integralkurve die Krümmung Null. Ersetzen wir in der Gleichung (15) die Zahl $m^2$ durch eine wenig kleinere oder gröfsere, so entstehen zwei Nachbarkurven der Leitlinie von wesentlich gleichem Verlauf, welche beispielsweise beide durch den Punkt $P_1$ hindurchgehen und sich asymptotisch der positiven Abscissenaxe anschliefsen. Wir können etwa statt der kleinen Zahl $m^2$ das eine Mal den Wert Null, das andere Mal den Wert $2m^2$ einsetzen. Die erste unserer Nachbarkurven fällt dann in dem uns interessierenden Gebiete mit der Hyperbel $uv = 1$ zusammen, die zweite hat die Gleichung

$$(1-uv)(v-u) = 2m^2(1-u^2)^2.$$

In den Punkten der ersten bez. zweiten Nachbarkurve besitzt die Integralkurve nach Gl. (15) die angenäherte Krümmung

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{-m^2}{(m^2\mu\lambda)^2} = -\frac{1}{m^2\mu^2\lambda^2},$$

bez.

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{2m^2-m^2}{(m^2\mu\lambda)^2} = +\frac{1}{m^2\mu^2\lambda^2}.$$

Der Wert von $m^2$ sollte etwa $\frac{1}{100}$ sein. Der Reibungskoeffizient $\mu$ ist ein echter Bruch; als Gröfsenordnung kann man etwa $\frac{1}{3}$ annehmen, so dafs $\mu^2$ etwa $\frac{1}{10}$ wird. Auch die Verhältniszahl $\lambda = \frac{\varrho}{E}$ ist ein

echter Bruch, da der Schwerpunkt einen merklichen Abstand von dem festen Punkte haben muſs, wenn anders wir es überhaupt mit einem „schweren Kreisel" zu thun haben, während die die Figurenaxe nach untenhin begrenzende Halbkugel sicherlich einen kleinen Radius besitzen wird. Um eine bestimmte Angabe zu machen, wollen wir etwa $\lambda^2$ gleich $\frac{1}{1000}$ (d. h. $E =$ ca. $32\,\varrho$) setzen. Unter diesen Voraussetzungen wird die angenäherte Krümmung der Integralkurve auf unseren beiden der Leitlinie benachbarten Kurven gleich $\pm 10^6$, der angenäherte Krümmungsradius also nur gleich ein Milliontel der Einheitsstrecke unserer Figur. Dabei ist der Abstand unserer beiden Nachbarkurven von einander und von der Leitlinie ein äuſserst geringer, nämlich selbst von der Gröſsenordnung $m^2$ und er vermindert sich überdies mit wachsender Annäherung an den Punkt $P_1$.

*Die Krümmung der Integralkurve also, die auf der Leitlinie selbst den Wert Null hat, wird in nächster Nähe derselben schon sehr groſs. Sobald sich die Integralkurve nur merklich von der Leitlinie entfernt hat, muſs sie schleunigst wieder umbiegen und sich der Leitlinie abermals nähern: Die Integralkurve ist hiernach gezwungen, mit äuſserst geringer Amplitude und Spannweite um die Leitlinie herumzuoscillieren,* ähnlich wie ein Massenpunkt um eine Ruhelage mit kleiner Amplitude und kurzer Schwingungsdauer herumpendelt, wenn er schon bei geringer Entfernung von der Ruhelage durch eine groſse Kraft nach jener zurückgetrieben wird.

Somit ist bewiesen, daſs der in der Figur 79 punktiert gezeichnete Verlauf der Integralkurve bei kleinem Werte von $m^2$, d. h. bei groſsem Anfangsimpuls unmöglich ist und daſs der geschlängelte, ausgezogene Verlauf mindestens qualitativ der Wirklichkeit entspricht. Der punktiert gezeichnete Weg mag vielleicht bei schwachem Anfangsimpulse zur Geltung kommen, doch gehen wir auf diesen minder wichtigen Fall nicht ein. Die entsprechenden Überlegungen und Konstruktionen lassen sich fast Wort für Wort auf den Fall $P < 0$ übertragen; wir können daher behaupten, daſs auch in Fig. 80 die Integralkurve um die Leitlinie herumpendeln muſs und niemals erheblich von ihr abbiegen kann.

Übrigens läſst sich die hier befolgte Schluſsweise, die wir als graphische Integration bezeichnen können, sofort auf den allgemeinen Fall der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dv^2} = f(u, v)$$

übertragen, wenn die Funktion $f(u, v)$ in der Umgebung der „Leitlinie" $f(u, v) = 0$ ein starkes Gefälle besitzt und der Anfangspunkt

der Integralkurve der Leitlinie nicht zu fern angenommen wird. Auch hier mufs die Integralkurve fortgesetzt um die Leitlinie herumpendeln.

Über die Amplitude und Spannweite der Pendelungen haben wir bisher nur gesagt, dafs sie äufserst klein sein müssen; wir fügen noch hinzu, dafs sie *um so kleiner ausfallen müssen, je kleiner die Zahl* $m^2$, *je gröfser also der anfängliche Bewegungsimpuls ist, und dafs sie mit zunehmender Annäherung an den Punkt* $P_1$ *abnehmen müssen.*

Denken wir uns, um dieses einzusehen, die Niveaulinien des Ausdrucks $f(u, v)$ konstruiert, welcher unserer Differentialgleichung zufolge die angenäherte Krümmung der Integralkurve bestimmt, in der Weise, wie dies für die speziellen Niveaulinien $f(u, v) = 0$ (die Leitlinie), und $f(u, v) = \pm \frac{1}{(m\mu\lambda)^2}$ (die beiden oben genannten Nachbarkurven) geschehen ist. Diese Niveaulinien liegen um so dichter, je kleiner $m^2$ ist, aufserdem verdichten sie sich in der Nähe des Punktes $P_1$, da sie alle durch diesen Punkt hindurch müssen. Die Dichtigkeit der Niveaulinien liefert aber direkt einen Mafsstab für die Krümmungszunahme der Integralkurve in der Nähe der Leitlinie und für ihre Tendenz, nach der Leitlinie zurückzukehren. Noch anschaulicher können wir uns den Ausdruck $f(u, v)$ als ein Relief modelliert denken, indem wir uns den absoluten Wert von $f(u, v)$ als dritte Koordinate senkrecht zur $u, v$-Ebene auftragen, wobei die eben genannten Niveaulinien zu Höhenlinien des Reliefs werden. Es entsteht so eine Rinne, deren Sohle in der $u, v$-Ebene liegt und mit unserer Leitlinie zusammenfällt und deren Böschungen beiderseitig um so steiler ansteigen, je kleiner $m^2$ ist und je mehr wir uns dem Punkte $P_1$ nähern. In letzterem stellen sich die Böschungen genau lotrecht. Wiederum wächst mit der Steilheit der Böschungen die Schnelligkeit, mit der die Integralkurve bei seitlicher Abbiegung der Leitlinie wieder zustrebt. Die Integralkurve verläuft ähnlich wie die Bahn eines schweren Punktes, der in der (reibungslos gedachten) Rinne entlang läuft, zugleich aber vermöge eines seitlichen Anfangsanstofses abwechselnd rechts und links an den Rändern etwas aufläuft. Während die bei den aufeinanderfolgenden Seitenpendelungen erreichte Höhenlage nach dem Energiegesetz dieselbe ist, wird die in horizontaler Richtung gemessene Amplitude der Seitenabweichung um so kleiner, je gröfser die Steilheit der Ränder ist; desgleichen wird die Zeitdauer der aufeinanderfolgenden Pendelungen oder, was auf dasselbe herauskommt, die längs der Sohle gemessene Spannweite der Seitenpendelungen geringer bei wachsender Steilheit der Ränder; denn die nach der Rinne zurücktreibende Kraft, d. h. die in die Böschung fallende Komponente der Schwere, ist dem

Gefälle der Böschung proportional. Die Bahn des Massenpunktes wird also, auf die horizontale Zeichenebene projiziert, was die Ausgiebigkeit der aufeinanderfolgenden Pendelungen betrifft, in der That die in der Fig. 79 und 80 dargestellte Form annehmen, welche somit auch unserer Integralkurve zukommen wird.

Die Schluſsfolgerungen, die sich von hieraus für den Ablauf der Kreiselbewegung ergeben, liegen auf der Hand. Mit wachsender Zeit nimmt der Eigenimpuls $N$ seiner Gröſse nach ab. Fiel er anfangs in die Richtung der Figurenaxe, so ist anfangs $|N| > |n|$ und mit wachsender Zeit nähert sich $N$ dem Werte $n$, d. h. $v$ dem Werte 1. Unsere Integralkurve zeigt dann, daſs sich gleichzeitig $u$ dem Werte 1 oder $\vartheta$ dem Werte 0 nähert. *Die Figurenaxe richtet sich also durch den Einfluſs der gleitenden Reibung allmählich auf.*

Hand in Hand mit der Aufrichtung der Figurenaxe geht natürlich ihre *Präcession* um die Vertikale von statten, deren jeweilige Geschwindigkeit sich nach Gl. (3) aus dem augenblicklichen Werte von $\vartheta$ und $N$ bez. von $u$ und $v$ berechnet. Die Aufrichtung der Figurenaxe wird unterbrochen und ihre Präcession wird begleitet von kleinen *Nutationen* der Figurenaxe, die durch die Seitenpendelungen unserer Integralkurve dargestellt werden. *Diese Nutationen sterben aber in dem Maſse ab, wie sich die Figurenaxe aufrichtet und sind übrigens von Hause aus um so kleiner, je gröſser der Anfangsimpuls war,* vorausgesetzt natürlich, daſs dieser genau oder ungefähr die Richtung der Figurenaxe hatte.

Ist die aufrechte Lage erreicht, so fällt der bisherige Grund für die Abnahme des Impulses, die gleitende Reibung, fort. In der That ergiebt sich mit $u = 1$ aus Gl. (6) $dN/dt = 0$; es bleibt also von nun ab $N = n$ oder $v = 1$: *Unsere Integralkurve endigt im Punkte $P_1$ und der Kreisel verharrt in der aufrechten Bewegung.* Die endgültige Vernichtung des Bewegungsimpulses fällt nicht der gleitenden sondern der bohrenden Reibung zu, wie bereits im vorigen Paragraph auseinandergesetzt wurde.

## § 5. Angenäherte formelmäſsige Darstellung des Bewegungsverlaufes.

Da wir auf Grund der vorangehenden Diskussion die Bewegung der Figurenaxe graphisch beherrschen, wird es nun leicht sein, eine näherungsweise formelmäſsige Darstellung der Bewegung zu geben. Wir fügen diese nachträglich hinzu, teils um einige numerische Rechnungen anstellen zu können, teils um den in der Einleitung (pag. 5) ausgesprochenen Grundsatz zu verwirklichen, nach welchem „unsere Kenntnis der Mechanik nicht auf die Formel basiert sein solle, sondern umgekehrt die ana-

lytische Formulierung als letzte Konsequenz aus einem gründlichen Verständnis der mechanischen Verhältnisse von selbst zum Vorschein komme".

Der Gedanke bei der folgenden Näherungsrechnung besteht darin, dafs wir, was die Änderungen von $\vartheta$ angeht, für die oscillierende Integralkurve der Figuren 79 und 80 unsere Leitlinie selbst substituieren. Was wir dabei vernachlässigen, sind die Nutationen der Figurenaxe, welche die Bewegung nur vorübergehend und in geringem Grade beeinflussen, was wir aber beibehalten und in unseren Formeln zum einfachen Ausdruck bringen, ist das Aufrichten der Figurenaxe, die Abnahme des Impulsvektors und der mittlere Betrag der Präcession, d. h. alle wesentlichen Momente der Bewegung.

Wir sehen also die Gl. (14) des vorigen Paragraphen als die während der Bewegung angenähert gültige Beziehung zwischen dem Neigungscosinus $u = \cos\vartheta$ und der Impulsgröfse $v = \frac{N}{n}$ an. Um dieselbe nach $v$ aufzulösen, schreiben wir sie folgendermafsen:

$$v^2 - \left(u + \frac{1}{u}\right) v = -1 \mp \frac{m^2}{u} (1 - u^2)^2.$$

Die beiden Wurzeln $v_1$, $v_2$ dieser quadratischen Gleichung werden:

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\sqrt{1 \mp 4um^2},$$
$$v_2 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\sqrt{1 \mp 4um^2}.$$

Wegen der auch jetzt vorauszusetzenden Kleinheit der Zahl $\pm m^2 = \frac{AP}{n^2}$ ziehen wir die Quadratwurzel nach dem binomischen Satze angenähert aus. Es ergiebt sich:

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)(1 \mp 2um^2) = \frac{1}{u} \mp m^2(1 - u^2),$$
$$v_2 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)(1 \mp 2um^2) = u \pm m^2(1 - u^2).$$

Da $u < 1$ ist, wird $v_1 > 1$, $v_2 < 1$. Die Bedeutung der beiden Wurzeln folgt aus Fig. 78. Schneiden wir nämlich die ausgezogene oder die punktierte Leitlinie jener Figur mit einer zur Abscissenaxe parallelen Geraden $u = \text{const.}$, wobei $0 < u < 1$ sein möge, so erhalten wir zwei Schnittpunkte, von denen der eine rechts von $P_1$, der andere links davon zwischen $P_1$ und $P_2$ liegt. Dem ersteren entspricht ein Abscissenwert $v_1 > 1$, dem letzteren ein solcher $v_2 < 1$. Wir interessieren uns nur für denjenigen Teil der Leitlinie, welcher von unserer Integralkurve umschlängelt wird, haben also nur den Wurzelwert $v_1$ zu be-

rücksichtigen. Gehen wir noch zu der ursprünglichen Bedeutung der Zeichen $v$, $u$ und $m^2$ zurück, so können wir die für $v_1$ gefundene Formel so schreiben:

$$N = \frac{n}{\cos\vartheta} - \frac{AP}{n}\sin^2\vartheta. \tag{1}$$

Wir erkennen hieraus, *in welcher gegenseitigen Abhängigkeit* $\vartheta$ *gegen* 0 *und* $N$ *gegen* $n$ *konvergiert.*

Wir berechnen zweitens die Präcessionsgeschwindigkeit $\psi'$, die zu den wechselnden Neigungen der Figurenaxe gehört. Aus (1) folgt

$$\frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} = \frac{P}{n}\cos\vartheta.$$

Dies ist nach Gl. (3) des vorigen Paragraphen zugleich die gesuchte Präcessionsgeschwindigkeit. Man hat also

$$\psi' = \frac{P}{n}\cos\vartheta \tag{2}$$

und schlieſst, *daſs sich die absolute Gröſse der Präcessionsgeschwindigkeit beim Aufrichten der Figurenaxe etwas beschleunigt.*

Wir fragen sodann nach dem zeitlichen Verlauf der Bewegung, der ja aus unserer qualitativen Darstellung eliminiert war. Hierbei haben wir auf die Gl. (8) des vorigen Paragraphen

$$t = \mp\frac{1}{Mg\mu\varrho}\int\frac{dN}{\sin\vartheta}$$

zurückzugehen. (Das obere Vorzeichen galt bei positivem Anfangswerte von $N$, also bei positivem $n$, das untere bei negativem.) Wir berechnen $dN$ durch $\vartheta$ und $d\vartheta$ aus Gl. (1):

$$dN = \left(\frac{n}{\cos^2\vartheta} - \frac{2AP}{n}\cos\vartheta\right)\sin\vartheta\, d\vartheta$$

und erhalten dann

$$t = \mp\frac{n}{Mg\mu\varrho}\left\{\int\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} - \frac{2AP}{n^2}\int\cos\vartheta\, d\vartheta\right\}.$$

Das doppelte Vorzeichen dürfen wir durch das einfache negative ersetzen, wenn wir dafür $n$ mit dem Zeichen des absoluten Betrages versehen. Führen wir die Integrationen aus und bestimmen die Integrationskonstante daraus, daſs $\vartheta = \vartheta_0$ für $t = 0$ sein soll, so ergiebt sich das folgende *Gesetz für den zeitlichen Verlauf der Bewegung:*

$$t = \frac{|n|}{Mg\mu\varrho}\left\{(\operatorname{tg}\vartheta_0 - \operatorname{tg}\vartheta) - \frac{2AP}{n^2}(\sin\vartheta_0 - \sin\vartheta)\right\}. \tag{3}$$

Das zweite Glied der { } ist wegen des kleinen Faktors $AP/n^2$ offenbar klein gegenüber dem ersten Gliede. Dieses erste Glied zeigt uns, daſs das Aufrichten der Figurenaxe ziemlich langsam von statten geht;

denn im Zähler steht die grofse Impulskomponente $n$, im Nenner der kleine Reibungskoeffizient $\mu$ und der kleine Radius $\varrho$ der Auflagefläche. *Die Zeitdauer des Aufrichtens wird um so gröfser, je gröfser der Anfangsimpuls war und je kleiner der Reibungskoeffizient $\mu$ sowie der Krümmungsradius der Auflagefläche ist.*

Der zahlenmäfsige Wert der zum Aufrichten erforderlichen Zeit ergiebt sich aus (3), wenn wir $\vartheta = 0$ setzen, zu

$$T = \frac{|n|}{Mg\mu\varrho}\left\{\operatorname{tg}\vartheta_0 - \frac{2AP}{n^2}\sin\vartheta_0\right\}. \tag{4}$$

*Die aufrechte Lage wird also in endlicher Zeit erreicht; die Zeit ist bei sonst gleichen Umständen im wesentlichen der Tangente der Anfangsneigung proportional.*

Es erübrigt nur noch, die Bahnkurve, die ein Punkt der Figurenaxe beschreibt, analytisch und zeichnerisch darzustellen. Wir gehen dabei einerseits von der Gl. (2)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{P}{n}\cos\vartheta,$$

andrerseits von der aus (3) folgenden Beziehung aus:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mp\frac{Mg\mu\varrho}{n}\,\frac{\cos^2\vartheta}{1 - \frac{2AP}{n^2}\cos^3\vartheta}. \tag{5}$$

Durch Division folgt

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = \mp\frac{P}{Mg\mu\varrho}\left(\frac{1}{\cos\vartheta} - \frac{2AP}{n^2}\cos^2\vartheta\right)$$

und durch Integration

$$\psi = \mp\frac{P}{Mg\mu\varrho}\left\{\log\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{AP}{n^2}\left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2}\right)\right\}. \tag{6}$$

Da die Gestalt der Bahnkurve in keiner Weise von dem dem Winkel $\psi$ vorzuschreibenden Anfangswerte $\psi_0$ abhängt, haben wir von der Hinzufügung einer Integrationskonstanten abgesehen.

Hier wollen wir eine unwesentliche Vernachlässigung gestatten, durch die sich das folgende vereinfacht. Wir wollen nämlich das zweite Glied der $\{\,\}$ in (6) gegen das erste wegen des Faktors $AP/n^2$ streichen. Ferner wollen wir, um bestimmte Vorzeichen zu haben, vorübergehend annehmen, dafs der Schwerpunkt *über* dem Stützpunkte liegt und dafs der anfängliche Impulsvektor die ungefähre Richtung der *positiven* Figurenaxe habe. Dann ist $P = +MgE$ zu setzen und in (6) das obere Vorzeichen zu wählen. Führen wir noch die schon früher benutzte Verhältniszahl $\lambda = \varrho/E$ ein, so schreibt sich Gl. (6) folgendermafsen:

$$\lambda\mu\psi = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)$$

oder auch

$$e^{\lambda\mu\psi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\vartheta/2}{1 + \operatorname{tg}\vartheta/2}$$

oder endlich

$$\operatorname{tg}\vartheta/2 = \frac{1 - e^{\lambda\mu\psi}}{1 + e^{\lambda\mu\psi}}. \tag{7}$$

*Dies ist die gesuchte Gleichung der Bahnkurve* bei positivem $P$ und positivem Anfangsimpulse. Sie gilt ebenso offenbar bei anderer Wahl der Vorzeichen von $P$ und $n$, wenn man nur nötigenfalls den Sinn, in dem $\psi$ gerechnet wird, umkehrt.

Um sie verzeichnen zu können, müssen wir sie irgendwie auf die Zeichenebene projizieren und zwar empfiehlt sich wie früher die *stereographische Projektion.* Wir schlagen also um den festen Punkt $O$ die Einheitskugel, auf welcher unsere Bahnkurve verläuft, wenn der sie erzeugende Punkt der Figurenaxe den Abstand 1 von $O$ hatte, und projizieren vom Südpol der Einheitskugel auf die Äquatorebene. Der Nordpol geht dabei in den Punkt $O$ über, während das Bild irgend eines anderen Punktes der Einheitskugel von $O$ den Abstand $r = \operatorname{tg}\vartheta/2$ und das Azimuth $\psi$ hat. $r$ und $\psi$ sind also gewöhnliche Polarkoordinaten des stereographischen Bildpunktes, bezogen auf den Punkt $O$ als Anfangspunkt. In diesen Koordinaten geschrieben wird das Bild der Bahnkurve nach Gl. (7):

$$r = \frac{1 - e^{\lambda\mu\psi}}{1 + e^{\lambda\mu\psi}}. \tag{8}$$

Ihre Gestalt ist die einer *Spirale,* u. zw. läuft sie in den Punkt $O$ als *eine gewöhnliche Archimedische Spirale* aus, während sie nach der anderen Seite hin sich *dem Einheitskreise asymptotisch nähert.*

Um dieses einzusehen, beachte man, daſs vermöge der Wahl der Integrationskonstanten in Gl. (6) der aufrechten Endlage ($\vartheta = 0$ oder $r = 0$) das Azimuth $\psi = 0$ und daſs allen früheren Lagen der Figurenaxe negative Werte von $\psi$ entsprechen. Um also das Verhalten der Bahnkurve in der Nähe des Punktes $O$ zu untersuchen, haben wir $\psi$ klein vorauszusetzen und die Exponentialfunktion nach Potenzen von $\lambda\mu\psi$ zu entwickeln. Es ergiebt sich so

$$r = -\lambda\mu\frac{\psi}{2} \tag{8'}$$

d. h. die Gleichung einer Archimedischen Spirale.

Um andrerseits die Bahnkurve für weit zurückliegende Zeiten festzustellen, haben wir $\psi$ einen groſsen negativen Wert beizulegen, also

$e^{\lambda\mu\psi}$ als klein anzusehen. $r$ nähert sich dabei der oberen Grenze 1, die Bahnkurve strebt also asymptotisch dem Einheitskreise zu.

In der Nähe von $O$ ist die Abnahme des Fahrstrahls $r$ bei einem vollen Umlauf um $O$ gegeben durch $\lambda\mu\pi$; dieselbe ist klein, weil $\lambda$ und $\mu$ kleine Zahlen sind, verschwindet aber nicht bei Annäherung an $O$. Dagegen wird offenbar, wenn wir die Kurve rückwärts bis in die Nähe des Einheitskreises verfolgen, die Zunahme des Fahrstrahls bei einmaligem Umlauf um $O$ mit zunehmender Näherung an den Einheitskreis verschwindend klein.

Man kann die Gestalt der Bahnkurve sehr schön experimentell feststellen, wenn man die Kreiselspitze ihren Weg auf einer dagegen gehaltenen berufsten Fläche aufzeichnen läfst, oder, was noch empfehlenswerter ist, wenn man senkrecht zur Kreiselaxe einen kleinen Spiegel befestigt, denselben mit einem Projektionsapparat beleuchtet und den zurückgeworfenen Lichtfleck auf einem Schirm beobachtet. Die so erhaltenen Kurven haben durchaus den Charakter der hier geschilderten Spiralen, nur dafs der gleichmäfsige Verlauf der Spirale von aufgesetzten Schlängelungen (den Nutationen) unterbrochen wird, die wir bei unserer Darstellung vernachlässigt haben.

Figur 81 ist unter der Annahme $\lambda\mu = 1/10$ entworfen. Sie entspricht der Wirklichkeit insofern nicht gut, als der wirkliche Wert $\lambda\mu$ meist erheblich kleiner sein dürfte. An einer früheren Stelle (pag. 565) schätzten wir $\mu^2 = 10^{-1}$, $\lambda^2 = 10^{-3}$, also $\lambda\mu = 1/100$, was der Wirklichkeit näher kommen dürfte. Jedoch würde bei Zugrundelegung dieser Zahl die Zeichnung schon etwas undeutlich werden.

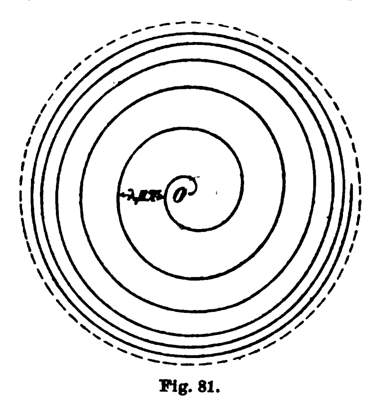


Fig. 81.

Für die folgenden Zahlenrechnungen wollen wir dagegen den letztgenannten Wert benutzen. Wir fragen uns zunächst, wie viele Windungen die Bahnkurve ausführt, bis sie von einer gegebenen Anfangslage aus im Nullpunkte endigt. Die Anfangslage sei etwa $\vartheta_0 = 60^0$. Den zugehörigen Wert des Azimuthes $\psi_0$, welcher negativ ausfallen mufs, entnehmen wir aus Gl. (8) oder, noch etwas genauer, aus Gl. (6), indem wir das im vorstehenden vernachlässigte Glied dieser Gleichung mitrechnen; er wird:

$$\psi_0 = -\frac{1}{\lambda\mu}\left\{\log \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_0}{2}\right) - \frac{AP}{n^2}\left(\vartheta_0 + \frac{\sin 2\vartheta_0}{2}\right)\right\}.$$

Mit $\lambda\mu = 10^{-2}$, $\vartheta_0 = 60^0 = 1{,}05$ und dem schon früher vorausgesetzten Wert $\frac{AP}{n^2} = 1/100$ ergiebt sich

$$\psi_0 = -130{,}2.$$

Dies ist der *Anfangswert* des Winkels $\psi$. Da der *Endwert*, bei aufrechter Stellung der Figurenaxe, $\psi = 0$ ist, so giebt uns $\psi_0$ zugleich den Gesamtwinkel, um den sich der von $O$ aus gezogene Fahrstrahl bei der Bewegung gedreht hat. Die Zahl der Windungen der Spirale wird daher

$$\frac{|\psi_0|}{2\pi} = 21.$$

*Die Figurenaxe umkreist also die Vertikale eine erhebliche Anzahl von Malen, bevor sie mit ihr zusammenfällt.* Die Ganghöhe der Bahnkurve wird dementsprechend in stereographischer Projektion recht gering und erheblich geringer wie im Falle der Fig. 81, wo die entsprechende Zahl von Umgängen nur 2,1 beträgt.

Wir können auch die Nutationen, obwohl sie aus unserer Betrachtung herausgefallen sind, nachträglich ihrer ungefähren Häufigkeit nach bestimmen. Es läſst sich zeigen, daſs die Periode $\tau$ der Nutationen näherungsweise denselben Wert wie bei der reibungslos vorausgesetzten pseudoregulären Präcession hat nämlich (s. Gl. (15) von pag. 305) den Wert

$$\tau = \frac{2\pi A}{N}. \tag{9}$$

Zum Beweise gehen wir auf die Differentialgleichung (7) von pag. 558 zurück, setzen darin $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ und verstehen unter $\vartheta_1$ den vorstehend studierten präcessionsähnlichen Teil der Bewegung, unter $\vartheta_2$ die hinzukommende Nutation. $\vartheta_1$ ist dann eine *langsam veränderliche*, $\vartheta_2$ eine *schnell veränderliche aber kleine* Gröſse. Dementsprechend wird man $\vartheta_1''$ gegen $\vartheta_2''$ vernachlässigen und bei der Entwickelung von Gl. (7) nach $\vartheta_2$ nur die erste Potenz von $\vartheta_2$ beibehalten. Es entsteht mit Rücksicht auf die Definition von $\vartheta_1$ aus der Gleichung der Leitlinie:

$$A\vartheta_2'' + \vartheta_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \frac{(N - \cos\vartheta_1\, n)\,(n - \cos\vartheta_1\, N)}{A \sin^2\vartheta_1} = 0.$$

Die hier angedeutete Differentiation liefert einfach (vgl. § 9, Gl. (13)) wo eine analoge Rechnung auszuführen sein wird) $N^2/A$. Die Bestimmungsgleichung für $\vartheta_2$ lautet mithin: $\vartheta_2'' + \vartheta_2 \frac{N^2}{A^2} = 0$ und liefert integriert die obige Periode.

Bedeutet andererseits $\mathsf{T}$ die Zeitdauer des einzelnen Präcessionsumganges und sieht man von der durch das Aufrichten der Figurenaxe bedingten geringen Beschleunigung der Präcessionsgeschwindigkeit ab, so kann man setzen:

$$\frac{2\pi}{\mathsf{T}} = \psi'$$

und nach Gl. (2):

$$(10) \qquad \frac{2\pi}{\mathsf{T}} = \frac{P}{n} \cos \vartheta.$$

Aus (9) und (10) ergiebt sich mit Rücksicht auf (1):

$$\frac{\mathsf{T}}{\tau} = \frac{nN}{AP} \frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{n^2}{AP} \frac{1}{\cos^2\vartheta} \left(1 - \frac{AP}{n^2} \cos\vartheta \sin\vartheta\right).$$

Unter $\vartheta$ ist hierbei ein Mittelwert des Neigungswinkels $\vartheta$ während des fraglichen Präcessionsumganges verstanden. Das Verhältnis $\mathsf{T}/\tau$ bedeutet *die Anzahl der Nutationen, die auf eine Präcession entfallen.* Diese Anzahl ist, wie wir sehen, der Gröfsenordnung nach gleich $n^2/AP$, also unter den obigen Zahlenannahmen gleich 100. *Die unserer Spirale sich überlagernden Schlängelungen sind also äufserst zahlreich und dicht.*

Schliefslich fragen wir noch nach dem Zahlenwerte der Zeitdauer $T$, in der sich die Figurenaxe aufrichtet. Diese drücken wir etwa in Einheiten der Umdrehungszeit $\tau_0$ des Kreisels nach erfolgtem Aufrichten aus. Alsdann ist der Gesamtimpuls genau gleich $n$ und die Länge des Rotationsvektors gleich $|n|/C$ geworden. Die Zeitdauer $\tau_0$ ergiebt sich daher aus

$$\frac{2\pi}{\tau_0} = \frac{|n|}{C}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit Gl. (4), so entsteht:

$$\frac{T}{\tau_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{A}{C} \frac{n^2}{AP} \frac{1}{\lambda\mu} \left\{ \operatorname{tg} \vartheta_0 - \frac{2AP}{n^2} \sin \vartheta_0 \right\}.$$

Mit $n^2/AP = 100$, $\lambda\mu = 1/100$, $\vartheta_0 = 60^0$ ergiebt sich

$$\frac{T}{\tau_0} = \frac{A}{C}\, 2730.$$

Macht der Kreisel nach der Aufrechtstellung noch fünf Umdrehungen pro Sec., so ist $\tau_0 = 1/5$ sec. und, wenn man insbesondere $A = C$ nimmt, $T = 546$ sec. $=$ ca. 10 Minuten.

Bei unseren letzten Berechnungen sowie bei der Beschreibung der Bahnkurve ist indessen zu bedenken, dafs unsere Betrachtungen nur bis in die Nähe der aufrechten Lage, nicht bis zu dieser selbst zutreffend zu sein beanspruchen. Denn wir haben (Ungenauigkeit II) die bohrende Reibung gegenüber der gleitenden vernachlässigt, was nur bei nicht zu kleinem Winkel $\vartheta$ zulässig ist (vgl. pag. 551). Von unserer Bahnkurve müssen wir daher das letzte, in den Punkt $O$ auslaufende Stück als unverbürgt ansehen.

Wir wollen endlich noch, indem wir in unseren Formeln $\mu = 0$ setzen, die hier betrachtete Bewegung in das System der reibungslosen Bewegungen einordnen. Wir gehen dabei aus von Gl. (5), welche mit $\mu = 0$ liefert

$$\vartheta' = 0 \text{ oder } \vartheta = \text{const.}$$

Dies ist zugleich bei verschwindender Reibung die Gleichung der Bahnkurve. Aus den Gl. (1) und (2) folgt dann, daſs auch $N$ und $\psi'$ konstant werden. *Bei verschwindender Reibung geht also die hier betrachtete Bewegung in die reguläre Präcession über.* Deshalb können wir sie als „eine Präcessions-ähnliche“ oder eine „durch Reibung gedämpfte Präcession“ bezeichnen. Nehmen wir andrerseits die Nutationen mit in Rechnung, die in unseren Formeln nicht zum Ausdruck kamen, die sich aber, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, unserer Bewegung überlagern, so tritt unsere jetzige Betrachtung in direkte Beziehung zu den früheren Untersuchungen über die *pseudoreguläre Präcession* und zeigt uns, wie diese wichtigste reibungslose Bewegung durch die Reibung modifiziert wird.

## § 6. Über einen beim Ansatz der Reibungsprobleme naheliegenden Fehler. Nachträgliche Rechtfertigung der obigen Behandlung und Hinweis auf das Experiment.

Der gegenwärtige Paragraph hat zunächst den Zweck, unsere früheren Angaben über die Bestimmung der Reibungsarbeit und des Reibungsmomentes (vgl. § 3 pag. 550) zu rechtfertigen bezw. zu beschränken. Dabei werden gewisse charakteristische Unterschiede zwischen den Reibungskräften oder allgemeiner gesprochen solchen Kräften, die ihrer Gröſse oder Richtung nach von der Geschwindigkeit des Systems abhängen, und denjenigen Kräften zur Sprache kommen, die sich nach Gröſse und Richtung allein durch die jeweilige Lage des Systems bestimmen und die man bei den Entwickelungen der theoretischen Mechanik in erster Linie im Auge zu haben pflegt.

Wir haben pag. 550 die Arbeit einer unendlich kleinen Drehung um eine horizontale und eine vertikale Axe gesondert berechnet und haben die erste als die Arbeit der gleitenden, die letztere als die der bohrenden Reibung angesprochen. In Formeln war

$$(1)\qquad \begin{cases} d\mathfrak{A}_1 = -\mu R \varrho \Omega \sin\alpha\, dt \\ d\mathfrak{A}_2 = -\mu' R \Omega \cos\alpha\, dt = -\mu R a \Omega \cos\alpha\, dt, \end{cases}$$

wo $a$ eine Länge von der Gröſsenordnung des Radius des Berührungskreises bedeutete. Die gesamte Reibungsarbeit also, welche bei der unendlich kleinen Drehung $\Omega dt$ um eine zur Vertikalen um den Winkel $\alpha$ geneigte Axe zu leisten ist, wäre hiernach

$$(2)\qquad d\mathfrak{A} = -\mu R \Omega (\varrho \sin\alpha + a\cos\alpha)\, dt.$$

Ist nun dieses Verfahren ohne weiteres zulässig?

Wir wollen zunächst den einfachen Fall eines einzelnen Massenpunktes betrachten, der sich in einer Ebene einmal unter dem Einfluſs

einer schon durch die Lage des Punktes bestimmten Kraft $P$, das andere Mal unter dem Einfluſs einer Reibungskraft bewegt. Die Reibungskraft $W$ ist zwar, wenn wir das Coulombsche Reibungsgesetz zu Grunde legen, der Gröſse nach von der Geschwindigkeit unabhängig, nämlich gleich $\mu R$, wo $R$ die Reaktion unserer Ebene auf den Punkt bedeutet, aber der Richtung nach von ihr abhängig, nämlich der Richtung der augenblicklichen Geschwindigkeit entgegengesetzt. Auf dem Wegstückchen $ds$ beträgt nun die Arbeit das eine Mal

$$d\mathfrak{A} = P \cos (P, ds)\, ds, \tag{3}$$

das andere Mal

$$d\mathfrak{A} = - W ds = - \mu R ds. \tag{4}$$

Andererseits berechnen wir diese beiden Arbeitsgröſsen, indem wir den Weg $ds$ in zwei rechtwinklige Komponenten $dx$ und $dy$ auflösen. Auf dem Wege $dx$ leistet $P$ die Arbeit $P_x\, dx$, wenn $P_x$ die Komponente von $P$ nach der $x$-Axe bedeutet. Entsprechend berechnet sich die Arbeit auf dem Wege $dy$; als Gesamtarbeit ergiebt sich daher:

$$d\mathfrak{A} = P_x\, dx + P_y\, dy, \tag{3'}$$

was bekanntlich mit (3) stimmt.

Wollen wir im zweiten Falle ebenso verfahren, so würden wir sagen: Führen wir zunächst die Bewegung $dx$ aus, so wird die Arbeit von $W$ auf diesem Wege gleich $- W dx = - \mu R dx$; denn bei der Bewegung $dx$ wirkt die Reibung dem Sinne der Bewegung entgegen, also in der Richtung der negativen $x$-Axe und ist der Gröſse nach durch Reibungskoeffizienten und Gegendruck $R$ gegeben. Ebenso wird die Arbeit auf dem Wege $dy$ gleich $- W dy$. Im Ganzen erhielte man so:

$$d\mathfrak{A} = - W(dx + dy) = - \mu R\, (dx + dy), \tag{4'}$$

was ersichtlich mit (4) nicht stimmt.

Die Berechnung der Reibungsarbeit aus den Arbeiten der Teilbewegungen ist also, in dieser Weise ausgeführt, unstatthaft. Man erkennt aber leicht, wie man diese Berechnung zu korrigieren hat, wenn man an der Zerlegung der Bewegung in die Komponenten $dx$ und $dy$ festhalten will: Man muſs die bei der thatsächlichen Bewegung $ds$ auftretende Reibung $W$ in zwei Komponenten $W_x = W \frac{dx}{ds}$ und $W_y = W \frac{dy}{ds}$ zerlegen und die Arbeit dieser Komponenten bei den Teilbewegungen $dx$ und $dy$ bestimmen. Alsdann ergiebt sich richtig und in Übereinstimmung mit (4):

$$d\mathfrak{A} = - (W_x\, dx + W_y\, dy) = - \mu R \frac{dx^2 + dy^2}{ds}.$$

Ähnlich hat man allemal bei Reibungswirkungen und allgemeiner bei Kräften, die in irgend einer Weise von der Geschwindigkeit ab-

hängen, zu unterscheiden: *zwischen der Arbeit, welche bei den Teilbewegungen, in die man die thatsächliche Bewegung zerlegen mag, zu leisten wäre, wenn eine solche Teilbewegung für sich betrachtet wird und gesondert vorhanden wäre; und zwischen derjenigen Arbeit, welche die bei der thatsächlichen Bewegung auftretenden Kräfte bei den gedachten Teilbewegungen leisten* *). Für den Ansatz der Bewegungsgleichungen hat man die zweite Berechnungsweise der Arbeit zu Grunde zu legen, während die erstgenannte hierbei irreführend sein würde.

Im § 3 wurde aber diese Unterscheidung bei der Aufstellung der vorstehend unter (1) wiedergegebenen Ausdrücke nicht hervorgehoben. Vielmehr wurde die bei der Rotation $\Omega \sin \alpha \, dt$ um eine horizontale Axe zu leistende Arbeit $d\mathfrak{A}_1$ und die bei der Rotation $\Omega \cos \alpha \, dt$ um eine vertikale Axe zu leistende Arbeit $d\mathfrak{A}_2$ gesondert berechnet, als ob die eine oder die andere Rotation allein vorhanden wäre; und es wurde stillschweigend angenommen, daſs sich die Arbeit $d\mathfrak{A}$, die bei der Rotation $\Omega dt$ um eine beliebig geneigte Axe zu leisten ist, additiv aus jenen Arbeitsgröſsen $d\mathfrak{A}_1$ und $d\mathfrak{A}_2$ zusammensetzt. Dies ist nach den obigen Erfahrungen nicht zutreffend; wir müssen daher die Berechnung der Arbeit $d\mathfrak{A}$ nachträglich kontrollieren.

Hierbei dürfen wir, um die bohrende Reibung auf gleitende Reibung zurückführen zu können, den Berührungskreis zwischen der die Figurenaxe begrenzenden Kugel und der den Kreisel tragenden Pfanne nicht in einen Punkt zusammenziehen. Allerdings tritt dann die pag. 548 hervorgehobene Schwierigkeit auf, daſs die Verteilung des Gegendruckes $R$ auf die Punkte des Berührungskreises statisch unbestimmt wird. Da wir auf elastische Verhältnisse nicht eingehen können, müssen wir eine Hülfsannahme machen. Die nächstliegende Annahme ist, daſs sich der Gegendruck $R$ gleichmäſsig auf den Umfang des Berührungskreises verteilt. Unterscheiden wir also die Punkte des Kreises durch einen um den Mittelpunkt des Berührungskreises herum gezählten Winkel $\beta$, so wird auf das Kreis-Element $d\beta$ der Bruchteil $\frac{d\beta}{2\pi} R$ des ganzen Gegendruckes $R$ kommen. Sicherlich ist diese Verteilung bei merklicher Neigung der Figurenaxe nicht ganz zutreffend; sie möge aber der Einfachheit wegen zugelassen werden.

Die folgende Zeichnung bezieht sich auf die Ebene des Berührungskreises (Fig. 82). Der Radius des Berührungskreises heiſse $a$; $\varrho$ sei

*) Eine interessante, technisch wichtige Folgerung hieraus zieht H. Lorenz in seinem Lehrbuch der technischen Physik, München 1902, S. 185: Der in Bewegung befindliche Steuerschieber einer Dampfmaschine läſst sich trotz des groſsen auf ihm lastenden Dampfdruckes senkrecht gegen seine Bewegungsrichtung fast reibungslos verschieben.

der Radius der begrenzenden Kugel. Die beiden Teilbewegungen sind je durch einen Pfeil angedeutet: die Drehung $\Omega \cos \alpha\, dt$ um die Vertikale durch $O$, welche sich in der Figur in den Mittelpunkt des Berührungskreises projiziert und die Drehung $\Omega \sin \alpha\, dt$ um eine horizontale Axe durch $O$, welche um den Kugelradius $\varrho$ oberhalb der Zeichenebene liegend zu denken ist und die sich in den Durchmesser $DD$ projizieren mögen. Von diesem Durchmesser aus möge auch das Azimuth $\beta$ gemessen werden.

Um die Reibungswirkung in einem beliebigen Punkte $P$ feststellen zu können, mufs man die Bewegung dieses Punktes kennen. Sie setzt sich aus zwei Teilbewegungen $du$ und $dv$ zusammen; $du$ entspricht der Vertikalkomponente des Rotationsvektors und ist tangential zum Berührungskreise gerichtet; $dv$ entspricht der Horizontalkomponente desselben und liegt eigentlich nicht genau in der Zeichenebene. Vielmehr ergiebt sich die genauere Richtung von $dv$ als das gemeinsame Lot auf der Horizontalkomponente des Rotationsvektors und dem kürzesten Abstande des fraglichen Punktes $P$ von der Axe jener Komponente. Sofern aber die Pfanne flach und daher der Radius $a$ klein gegen den Radius $\varrho$ ist, ist die Neigung von $dv$ gegen die Zeichenebene nur gering. Deshalb möge es gestattet sein, $dv$ in die Zeichenebene fallend anzusehen. Im gleichen Sinne wird es erlaubt sein, den Abstand des Punktes $P$ von der Axe der horizontalen Rotationskomponente, welcher eigentlich $b = \sqrt{\varrho^2 - a^2 \cos^2 \beta}$ ist, einfach gleich $\varrho$ zu setzen. Hiernach ergiebt sich als Gröfse der Teilbewegungen

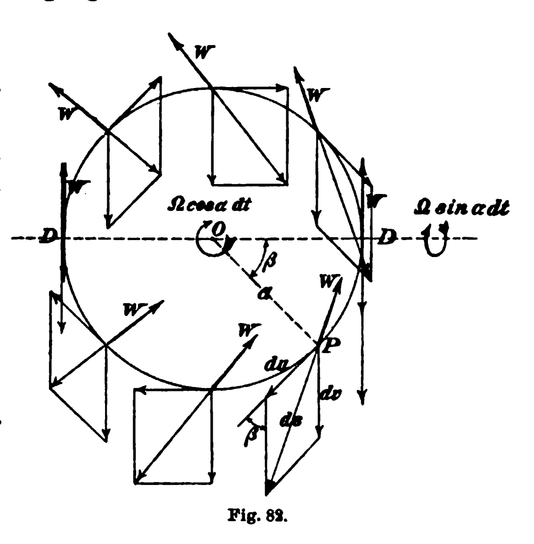


Fig. 82.

$$du = \Omega \cos \alpha\, a dt, \qquad dv = \Omega \sin \alpha\, b dt = \Omega \sin \alpha\, \varrho dt.$$

Die Gesamtbewegung von $P$ folgt hieraus zu

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2 + 2 du\, dv \cos \beta}.$$

In jedem Elemente $d\beta$ des Berührungskreises tritt nun eine Reibungskraft $W$ auf, deren Richtung der Richtung von $ds$ entgegengesetzt ist und deren Gröfse zufolge unserer Annahme über die Verteilung des

Gegendruckes gleich $\mu R \frac{d\beta}{2\pi}$ ist. In der Figur ist $W$ für eine Anzahl äquidistanter Punkte der Kreisperipherie konstruiert. Die Arbeit dieser Reibungskraft wird gleich

$$-\mu R \frac{d\beta}{2\pi} ds,$$

die Gesamtarbeit auf dem ganzen Berührungskreise daher gleich

$$d\mathfrak{A} = -\frac{\mu R}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta\, ds.$$

Tragen wir den angegebenen Wert für $ds$ ein, so können wir schreiben:

$$d\mathfrak{A} = -\frac{\mu R \Omega dt}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta \sqrt{a^2\cos^2\alpha + \varrho^2\sin^2\alpha + 2a\varrho\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta}.$$

Dies ist ein elliptisches Integral. Statt $\beta$ führen wir als Integrationsvariable $\gamma = \beta/2$ ein; unser Integral nimmt dann die Form eines Legendreschen Integrals zweiter Gattung an; es wird nämlich:

$$(5)\qquad d\mathfrak{A} = -\mu R\Omega\,(a\cos\alpha + \varrho\sin\alpha)\,dt\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\gamma\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(6)\qquad k^2 = \frac{4a\varrho\cos\alpha\sin\alpha}{(a\cos\alpha+\varrho\sin\alpha)^2} = \frac{4\frac{\varrho}{a}\operatorname{tg}\alpha}{\left(1+\frac{\varrho}{a}\operatorname{tg}\alpha\right)^2}.$$

Der somit festgestellte Wert (5) der Reibungsarbeit unterscheidet sich aber von dem oben angegebenen Werte (2) nur durch den Faktor

$$(7)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\gamma\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma} = \frac{2}{\pi}E(k),$$

wo die Bezeichnung $E$ im Sinne von Legendre gebraucht ist. Die Kontrolle des Ausdrucks (2) wird also darin zu bestehen haben, daſs wir uns fragen, inwieweit der letztgenannte Faktor von der Einheit abweicht.

Zu dem Ende verzeichnen wir in Fig. 83 einerseits die Gröſse von $k$, andererseits die von $\frac{2}{\pi}E(k)$ für wechselnde Werte der Abscisse $x = \frac{\varrho}{a}\operatorname{tg}\alpha$.

Was zunächst die Linie für $k$ betrifft, so zeigt man leicht, daſs dieselbe für den Abscissenwert $x = 1$ ein Maximum besitzt; der zu-

gehörige Wert von $k$ ist gleich 1. Für $x = \frac{1}{2}$ oder $x = 2$ ergiebt sich $k^2 = \frac{8}{9}$, $k = 0{,}94$, für $x = \frac{1}{4}$ oder $x = 4$ wird $k^2 = \frac{16}{25}$, $k = 0{,}80$, für $x = \frac{1}{8}$ oder $x = 8$ folgt $k = 0{,}63$ u. s. f.; für $x = 0$ und $x = \infty$ wird gleicherweise $k = 0$. Wir haben also bei $x = 0$ einen steilen Anstieg,

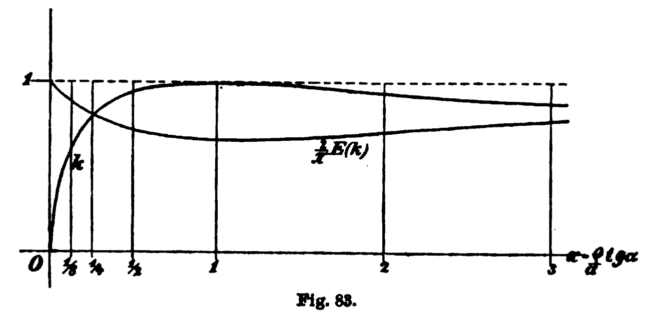



Fig. 83.

dann ein flaches Maximum und von hier aus einen asymptotischen Abfall zu Null.

Zur Verzeichnung der Linie für $\frac{2}{\pi} E(k)$ genügen etwa die den meisten Logarithmentafeln beigegebenen Tabellen der Ellipsenquadranten. Dieselben zeigen beispielsweise, daſs für die soeben genannten Werte von $k = 0{,}94$, $k = 0{,}80$, $k = 0{,}63$ bezw. $\frac{2}{\pi} E(k)$ gleich wird 0,71, 0,81, 0,89. Für den maximalen Wert $k = 1$ hat $\frac{2}{\pi} E(k)$ seinen Kleinstwert $\frac{2}{\pi} = 0{,}64$, für $k = 0$ seinen Gröſstwert 1.

Nun entspricht der Abscissenwert $x = 1$ derjenigen Neigung $\alpha$ von Rotationsaxe und Vertikaler, für welche $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\varrho}$ wird, wo also die Rotationsaxe gerade durch die Peripherie des Berührungskreises hindurchgeht. Dementsprechend bedeutet ein Abscissenwert $x < 1$, daſs die Rotationsaxe das Innere des Berührungskreises trifft, während $x > 1$ heiſst, daſs sie auſserhalb daran vorbeigeht. Wenn, wie wir voraussetzen, der Berührungskreis klein ist, ($a$ klein gegen $\varrho$), so muſs die Rotationsaxe schon merklich senkrecht stehen, wenn sie die Peripherie des Berührungskreises treffen oder durch das Innere desselben hindurchgehen soll. Zu allen einigermaſsen beträchtlichen Neigungen der Rotationsaxe gehören in unserer Figur groſse Werte der Abscisse $x$, mithin Werte von $\frac{2}{\pi} E(k)$, die der Einheit nahe kommen. Auch im umgekehrten Falle, wenn die Rotationsaxe dicht am Mittelpunkte des Berührungskreises vorbeigeht, wird der Wert von $\frac{2}{\pi} E(k)$ nahezu gleich 1.

In diesen beiden Fällen stimmt also unser jetziger Ausdruck (5) für die Reibungsarbeit mit dem früheren Ausdruck (2) merklich über-

ein. *Unsere frühere Behandlung ist also gerechtfertigt* 1) *wenn die Rotationsaxe einen merklichen Winkel mit der Vertikalen bildet*, 2) *wenn sie fast genau mit dieser zusammenfällt.* Nur von diesen beiden Fällen haben wir aber früher gesprochen, von dem ersten Falle in § 4 und 5 (allmähliches Aufrichten der Figurenaxe durch die gleitende Reibung), von dem zweiten am Schluſs von § 3 (allmähliches Absterben der aufrechten Kreiselbewegung infolge der bohrenden Reibung). Wenn dagegen die Rotationsaxe den Berührungskreis trifft oder in seiner Nähe innerhalb oder auſserhalb vorbeigeht, d. h. wenn $x = \frac{\varrho}{a} \operatorname{tg} \alpha$ weder sehr klein noch sehr groſs ist, muſs der frühere Arbeitsausdruck durch Hinzufügung des Faktors $\frac{2}{\pi} E(k)$ korrigiert werden, welcher im ungünstigsten Falle ($x = 1$) jenen Ausdruck auf 64% des früheren Betrages herabsetzt.

Es ist auch von unserem jetzigen Standpunkte aus zulässig und naheliegend, die gesamte Reibungsarbeit $d\mathfrak{A}$ in zwei Teile $d\mathfrak{A}_1$ und $d\mathfrak{A}_2$ aufzulösen, von denen der eine dem augenblicklichen Drehwinkel um eine horizontale Axe $\Omega \sin \alpha \, dt = d\omega_h$ proportional ist und *Arbeit der gleitenden Reibung* genannt werden kann und von denen der andere dem augenblicklichen Drehwinkel um die Vertikale $\Omega \sin \alpha \, dt = d\omega_v$ proportional ist und *Arbeit der bohrenden Reibung* heiſsen möge. Mit Benutzung der eben genannten Winkel können wir nach (5) und (7) schreiben

$$d\mathfrak{A} = d\mathfrak{A}_1 + d\mathfrak{A}_2 = -\mu R(\varrho \, d\omega_h + a \, d\omega_v) \frac{2}{\pi} E(k)$$

und können dementsprechend definieren:

$$(8) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{A}_1 = -\mu R \varrho \frac{2}{\pi} E(k) \, d\omega_h, \\ d\mathfrak{A}_2 = -\mu R a \frac{2}{\pi} E(k) \, d\omega_v. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke stimmen wieder mit den früheren Werten aus Gl. (1) überein, wenn $\frac{2}{\pi} E(k)$ merklich gleich 1 ist, wenn also die Rotationsaxe entweder merklich von der Vertikalen abweicht oder wenn sie fast genau mit ihr zusammenfällt. Im ersten Falle ergiebt sich der frühere Schluſs, daſs die Arbeit der bohrenden Reibung klein gegen die Arbeit der gleitenden Reibung wird, daſs man also von der bohrenden Reibung näherungsweise absehen darf, wie wir es vermöge unserer Vernachlässigung (II) thaten. Im anderen Falle ist umgekehrt die Arbeit der bohrenden Reibung die überwiegende. Tritt keiner dieser beiden Fälle ein, so sind die früheren Ausdrücke (1) durch Hinzufügung des Faktors $\frac{2}{\pi} E(k)$ zu korrigieren.

Es ist schliefslich durchaus folgerichtig, die *Momente der gleitenden und bohrenden Reibung* von unserem jetzigen Standpunkte aus folgenderweise zu definieren. Man bemerke allgemein, dafs das Moment einer Kraft um eine Axe erklärt werden kann als das Verhältnis der Arbeit, welche die Kraft bei einer unendlich kleinen Drehung um die fragliche Axe leistet, zur Gröfse des Drehwinkels. In unserem Falle handelt es sich einerseits um eine horizontale Axe und den zugehörigen Drehwinkel $d\omega_h$. Die in Betracht kommende Reibungsarbeit ist die Arbeit der gleitenden Reibung $d\mathfrak{A}_1$. Wir definieren daher als Moment der gleitenden Reibung die Gröfse

$$M_1 = \frac{d\mathfrak{A}_1}{d\omega_h} = -\mu R \varrho \frac{2}{\pi} E(k).$$

Andrerseits gehört zu der Drehung $d\omega_v$ um die Vertikale die Arbeit $d\mathfrak{A}_2$ der bohrenden Reibung. Als Moment der bohrenden Reibung ist daher zu bezeichnen

$$M_2 = \frac{d\mathfrak{A}_2}{d\omega_v} = -\mu R a \frac{2}{\pi} E(k).$$

Diese Werte stimmen natürlich wieder mit den in § 3 pag. 550 angegebenen Werten von $M_1$ und $M_2$ überein, wenn die Rotationsaxe einen merklichen Winkel gegen die Vertikale bildet und zeigen uns überdies, wie die früheren Werte zu korrigieren sind, wenn jene Voraussetzung nicht erfüllt ist. Die negativen Vorzeichen, welche bei unserer jetzigen Definition zu den Ausdrücken für $M_1$ und $M_2$ hinzugetreten sind, waren früher in der besonderen Festsetzung enthalten, dafs die Momente dem Sinne nach der zugehörigen Rotationskomponente entgegengesetzt sind. —

Bevor wir unsere Betrachtungen über die Reibung beim Kreisel mit festem Stützpunkte beschliefsen, wünschen wir nochmals auf das *Experiment* als den eigentlichen Wertmesser unserer theoretischen Resultate hinzuweisen. Wir haben häufig Versuche mit dem auf pag. 1 abgebildeten, von Rozé konstruierten Kreisel angestellt und konnten hierbei die vorstehend geschilderten theoretischen Ergebnisse in allgemeinen Umrissen durchaus bestätigen. Dieses allerdings nur unter der Beschränkung, dafs der dem Kreisel ursprünglich erteilte Impuls hinreichend grofs war, einer Beschränkung, die aber auch unseren sämtlichen theoretischen Untersuchungen ausdrücklich zu Grunde gelegt wurde.

Bei nur mäfsigem Impuls verlaufen die Erscheinungen lange nicht so typisch und durchsichtig wie bei starkem Impuls. Alsdann spielen offenbar störende Ursachen, die wir im Einzelnen nicht übersehen

können, wie die besonderen Verhältnisse an der Unterstützungsstelle, eine zu groſse Rolle gegenüber den eigentlichen Trägheitswirkungen, die wir allein theoretisch beherrschen. Die einfache schematische Beschreibung der Reibungseinflüsse, die in den vorigen Paragraphen enthalten ist, paſst auf solche Fälle nicht, und braucht auch nach den eingeführten beschränkenden Voraussetzungen darauf nicht zu passen.

Ist aber der Impuls hinreichend stark, so treten regelmäſsig die öfters genannten Erscheinungen auf: Die Figurenaxe richtet sich auf, indem sie einen Spiralkegel beschreibt, und zwar gleichviel ob der Schwerpunkt über oder unter der Unterstützungspfanne liegt; die Präcessionsgeschwindigkeit beschleunigt sich dabei, entsprechend Gl. (2) von pag. 570, Nutationen der Axe, die man anfangs etwa absichtlich durch einen Schlag erzeugt hat, sterben in dem Maſse ab, wie sich die Figurenaxe der aufrechten Stellung nähert.

Trotzdem läſst eine solche allgemeine Bestätigung der Theorie noch viel zu wünschen übrig, da sie über die quantitativen Verhältnisse nichts besagt. Zu einer gründlichen experimentellen Bestätigung wäre es erforderlich, zunächst die Masse und Massenverteilung des Versuchskreisels, also die Gröſsen $M, P, A, C$ durch Wägung und Schwingungsbeobachtung zu bestimmen, ferner den ursprünglichen Wert sowie die Abnahme der Umdrehungszahl und somit indirekt die Gröſse des Impulses $N$ durch stroboskopische Methoden während des einzelnen Experimentes festzustellen und endlich die wechselnden Lagen des Kreisels zuverlässig zu registrieren.

Wir sind uns wohl bewuſst, daſs nach dieser Richtung hin unsere Behandlung sehr lückenhaft ist und wünschen dringend, daſs in künftigen Untersuchungen zur irdischen Dynamik die experimentelle Prüfung und die mathematische Überlegung mehr als gleichwertige und gleichunentbehrliche Faktoren neben einander behandelt werden möchten.

## § 7. Einfluſs des Luftwiderstandes auf die Kreiselbewegung.

Neben der Reibung wirkt offenbar auch der Luftwiderstand bei der Kreiselbewegung als eine Energie verbrauchende Ursache mit. Indem der Kreisel die umgebende Luft in Bewegung setzt und indem sich diese Bewegung teils weiter entfernten Luftschichten mitteilt, teils durch die Reibung zwischen ungleich bewegten Schichten verzögert wird, flieſst dauernd Bewegungsenergie von der bewegten Kreiselmasse in das umgebende Mittel ab. Dieser Umstand kann nicht umhin, auf die Kreiselbewegung selbst zurückzuwirken.

Die Gröſse des Einflusses wird verschieden sein je nach der Form des Kreisels und nach der Art seiner Bewegung. Mit einer Vergröſserung der Oberfläche wird der Einfluſs im allgemeinen wachsen, mit einer Vermehrung der Masse bei gleichbleibender Oberfläche abnehmen. Ein Kreisel von groſsen Dimensionen wird daher vom Luftwiderstande weniger in Mitleidenschaft gezogen werden, wie ein geometrisch-ähnlicher Kreisel von kleineren Abmessungen, weil das Verhältnis Rauminhalt (oder Masse) zu Oberfläche bei jenem gröſser ist wie bei diesem. Hat der Kreisel, wie es bei pneumatischem Antrieb der Fall ist, Schaufeln, gegen welche der antreibende Luftstrom gelenkt wird, so wird beim weiteren Bewegungsverlauf der verzögernde Einfluſs der Luft erheblich gröſser sein wie bei einem Körper mit glatter Oberfläche etc.

Auch die Art der Bewegung nimmt auf die Wirkung des Luftwiderstandes Einfluſs. Hat die Oberfläche Rotationssymmetrie um die Figurenaxe, so wird sich der einfachen Drehung um die Figurenaxe nur ein geringer Luftwiderstand entgegensetzen. Dagegen wird die fortschreitende Bewegung der Figurenaxe in höherem Grade durch den Luftwiderstand behindert werden, und zwar die schnellen Nutationen wieder in höherem Grade wie die langsame Präcessionsbewegung. Man wird also erwarten dürfen, daſs die Nutationen in schnellerem Zeitmaſs abklingen wie die langsame Präcessionsbewegung und diese wieder schneller wie die Eigendrehung um die Figurenaxe, daſs überhaupt durch den Luftwiderstand und ähnlich durch die anderen Energieverzehrenden Wirkungen allemal auf eine Ausgleichung der ursprünglich vorhandenen Unregelmäſsigkeiten und auf eine Vereinfachung der Bewegungsform hingearbeitet wird.

Wie man hiernach sieht, ist das Problem des Luftwiderstandes reichlich kompliziert. Um es in Strenge zu behandeln, wäre es nötig, neben den Differentialgleichungen der Kreiselbewegung die hydrodynamischen Gleichungen für die Bewegung des umgebenden Mittels in ihrem wechselseitigen Zusammenhange zu berücksichtigen, wie schon gelegentlich des ähnlichen ballistischen Problems (pag. 535) bemerkt wurde. Wir kämen dabei zu einer Aufgabe wie sie unter dem Namen „Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit“ von mathematischer Seite vielfach behandelt worden ist*), nur daſs die grundlegende Voraussetzung aller einschlägigen Behandlungen, daſs nämlich die Flüssigkeit inkompressibel und reibungslos sei und daſs ihr durch den

*) Eine zusammenfassende Darstellung der betr. Arbeiten giebt A. E. H. Love in der Encyklopädie der mathem. Wissensch. Bd. IV, Art. 16, Hydrodynamik II.

Körper eine Bewegung mit Geschwindigkeitspotential erteilt werde, fallen zu lassen wäre, da sie den Verhältnissen des Luftwiderstandes gar zu schlecht entspricht. Mit dieser Voraussetzung fällt aber auch die Möglichkeit einer strengen und eleganten mathematischen Behandlung. Wir müssen daher auf eine Untersuchung des Luftwiderstandes im Anschluſs an die vorhandene mathematische Litteratur von vornherein verzichten.

Unsere Behandlung soll vielmehr derjenigen nachgebildet sein, die der Physiker bei der Bestimmung der durch Luftwiderstand gedämpften Pendelschwingungen, der Schwingungen einer Galvanometernadel mit magnetischer oder Flüssigkeitsdämpfung etc. einzuschlagen pflegt. Man nimmt hierbei an, daſs man die Dämpfungswirkung wenigstens bei kleinen Ausschlägen dadurch hinreichend genau berücksichtigen könne, daſs man der Bewegungsgleichung ein der augenblicklichen Geschwindigkeit proportionales Glied hinzufügt. Ähnlich wollen wir annehmen, *daſs die Wirkung des Luftwiderstandes auf die Kreiselbewegung annähernd durch eine der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit $\Omega$ nach Gröſse und Axe proportionale entgegengerichtete Drehkraft beschrieben werden kann.* Lösen wir etwa $\Omega$ nach den drei Hauptaxen des Körpers in die Komponenten $p$, $q$, $r$ auf, so werden wir also die Komponenten des Luftwiderstandsmomentes nach eben jenen Axen gleich $-\lambda p$, $-\lambda q$, $-\lambda r$ setzen. Vielleicht wäre es angezeigt, den Koeffizienten von $r$ kleiner zu wählen als die von $p$ und $q$, also die Komponenten des Momentes gleichzusetzen $-\lambda_1 p$, $-\lambda_1 q$, $-\lambda_2 r$ $(\lambda_2 < \lambda_1)$, weil durch die Drehung um die Figurenaxe, wie oben bemerkt, die Luft weniger mitgenommen wird, wie durch eine Drehung der Figurenaxe um eine dazu senkrechte Axe. Da aber unser Ansatz auch dann nicht beanspruchen könnte, den Verhältnissen der Wirklichkeit genau zu entsprechen, so werden wir uns mit der zuerst genannten weitgehenden Schematisierung des Ansatzes begnügen, der übrigens für Späteres eine besondere Bedeutung hat. Ferner werden wir natürlich von allen sonstigen Reibungseinflüssen jetzt absehen.

Wir wollen uns zunächst fragen, wie *die Bewegung des kräftefreien Kreisels* (Poinsot-Bewegung) durch den so aufgefaſsten Luftwiderstand modifiziert wird. Die Behandlung wird hier sehr einfach. Bei der Poinsotbewegung gehen wir am besten von den Eulerschen Gleichungen (vgl. pag. 142) aus, die sich für den symmetrischen Kreisel $(B = A)$ unter Hinzufügung unserer Luftwiderstandsglieder folgendermaſsen schreiben:

$$A \frac{dp}{dt} = (A - C)\, qr - \lambda p,$$

$$A\frac{dq}{dt} = (C-A)\,rp - \lambda q,$$
$$C\frac{dr}{dt} = \qquad\qquad -\lambda r.$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man zunächst, daſs die Eigenrotation $r$ nach dem folgenden Gesetz von ihrem Anfangswerte $r_0$ aus (entsprechend $t=0$) abnimmt:

$$(1) \qquad r = r_0 e^{-\frac{\lambda t}{C}}.$$

Die beiden ersten Gleichungen fassen wir nach Multiplikation mit 1 und $i$ zu der komplexen Gleichung zusammen:

$$(2) \qquad A\frac{d(p+iq)}{dt} = (C-A)\,ir\,(p+iq) - \lambda(p+iq).$$

Durch Division mit $p+iq$ und Eintragung des Wertes von $r$ aus (1) ergiebt sich:

$$\frac{d\log(p+iq)}{dt} = \frac{C-A}{A}\,ir_0 e^{-\frac{\lambda t}{C}} - \frac{\lambda}{A}$$

und durch Integration:

$$\log(p+iq) = -\frac{\lambda t}{A} - \frac{C-A}{A}\frac{C}{\lambda}\,ir_0 e^{-\frac{\lambda t}{C}} + \text{const.}$$

Bestimmen wir noch die Integrationskonstante durch die Anfangswerte $p_0$, $q_0$, so können wir schreiben:

$$(3) \qquad p+iq = (p_0+iq_0)\,e^{-\frac{\lambda t}{A} + \frac{C-A}{A}\frac{C}{\lambda}ir_0\left(1-e^{-\frac{\lambda t}{C}}\right)}.$$

Man erkennt hieraus, daſs der absolute Betrag von $p+iq$, d. i. die Länge der äquatorialen Komponente des Drehungsvektors nach einem ähnlich einfachen Gesetz abnimmt wie die Eigenrotation $r$. Man hat nämlich

$$(4) \qquad \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{p_0^2+q_0^2}\,e^{-\frac{\lambda t}{A}}.$$

Bezeichnet man ferner mit $\alpha$ denjenigen Winkel, den die genannte Komponente mit ihrer Anfangslage einschlieſst, indem man setzt:

$$\frac{p+iq}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{p_0+iq_0}{\sqrt{p_0^2+q_0^2}}\,e^{i\alpha},$$

so ergiebt sich aus (3) für $\alpha$ der Wert

$$(5) \qquad \alpha = \frac{C-A}{A}\frac{C}{\lambda}\,r_0\left(1-e^{-\frac{\lambda t}{C}}\right).$$

Nach den Gleichungen (1), (4) und (5) läſst sich nun der allgemeine Charakter der Bewegung folgendermaſsen schildern: *Sowohl die Kompo-*

*nente des Rotationsvektors nach der Figurenaxe wie die dazu senkrechte äquatoriale Komponente werden durch den Luftwiderstand stetig bis auf Null verkürzt; die Zeitdauer dieses Vorganges ist unendlich; die Anzahl der Umgänge, welche der Rotationsvektor unterdessen um die Figurenaxe ausführt, ist endlich und berechnet sich aus* (5) *zu*

$$\frac{\alpha_\infty}{2\pi} = \frac{C-A}{A}\,\frac{C}{\lambda}\,\frac{r_0}{2\pi};$$

sie ist um so gröſser, je gröſser die anfängliche Eigenrotation war und je kleiner die Dämpfungskonstante $\lambda$ ist; mit verschwindendem $\lambda$, wo die Bewegung eine reguläre Präcession wird, wächst jene Zahl, wie es sein muſs, ins Unendliche.

Interessante Unterschiede ergeben sich je nach dem Verhältnis der Hauptträgheitsmomente $A$ und $C$. Wir bestimmen etwa die jeweilige Neigung $\beta$ des Rotationsvektors gegen die Figurenaxe, indem wir nach (1) und (4) bilden

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r} = \frac{\sqrt{p_0^2+q_0^2}}{r_0}\, e^{-\lambda t\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)}.$$

Führen wir noch die anfängliche Neigung $\beta_0$ ein, so können wir auch schreiben:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta_0\, e^{-\lambda t\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)}. \tag{6}$$

Der Winkel $\beta$ wächst hiernach kontinuierlich an oder nimmt ständig ab, je nachdem $C$ kleiner oder gröſser als $A$ ist. *Die Rotationsaxe strebt in jedem Falle einer Axe gröſsten Hauptträgheitsmomentes zu, im Falle des abgeplatteten Trägheitsellipsoides* ($C > A$) *der Figurenaxe, im Falle des verlängerten Trägheitsellipsoides* ($C < A$) *einer äquatorialen Axe.* Im Falle des Kugelkreisels, wo jede Axe als Axe eines gröſsten Hauptträgheitsmomentes aufgefaſst werden kann, wird die Rotationsaxe durch den Luftwiderstand natürlich überhaupt nicht umgelagert; hier besteht vielmehr die einzige Wirkung desselben in einer allmählichen Schwächung der Rotationsgeschwindigkeit.

Den Unterschied zwischen beiden Fällen können wir noch deutlicher beschreiben, wenn wir an den Verlauf des Polhodiekegels denken. *Im Falle $C > A$ verengert sich der Polhodiekegel im Verlaufe der Bewegung und zieht sich schlieſslich auf die Figurenaxe zusammen, nachdem er sie eine endliche Anzahl von Malen umschlungen hat; im Falle $C < A$ erweitert er sich und läuft, abermals nach einer endlichen Anzahl von Umgängen, in die Äquatorebene des Kreisels fächerartig aus**).

*) Hätten wir den oben genannten allgemeineren Ansatz gemacht, bei welchem zwischen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ unterschieden wird, so würden wir als Bedingung

Wir wollen etwa, um beide Fälle durch eine Figur veranschaulichen zu können, den Polhodiekegel mit einer im Körper festen Ebene schneiden, die wir im Abstande 1 von $O$ senkrecht zur Figurenaxe legen. Nennen wir den Durchstoſsungspunkt jener Ebene mit der Figurenaxe $O'$, den mit der augenblicklichen Rotationsaxe $P$, so ist die Entfernung $\varrho = O'P$ mit $\operatorname{tg}\beta$, ihr Anfangswert $\varrho_0$ mit $\operatorname{tg}\beta_0$ identisch. Der Winkel, um den sich der Vektor $O'P$ gegen seine Anfangslage $O'P_0$ gedreht hat, ist der oben berechnete Winkel $\alpha$ Die entstehende Kurve der aufeinander folgenden Punkte $P$, d. h. die Spur des Polhodiekegels in der Zeichenebene, wird also in Polarkoordinaten durch $\varrho$ und $\alpha$ bestimmt. Führen wir als eine bequeme Zeiteinheit die Dauer $\tau$ einer vollen Kreiselumdrehung zu Beginn der Bewegung ein, so wird $r_0 = \frac{2\pi}{\tau}\cdot$ Benutzen wir überdies für die reinen Zahlengröſsen $\frac{C}{A} - 1$ und $\frac{\lambda\tau}{C}$ die Abkürzungen $\gamma$ und $\delta$, so können wir (6) und (5) folgendermaſsen schreiben:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = e^{-\gamma\delta\frac{t}{\tau}}, \quad \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\gamma}{\delta}\left(1 - e^{-\delta\frac{t}{\tau}}\right). \tag{7}$$

Fig. 84.

Fig. 85.

In den Figuren 84 und 85 haben wir $\gamma = \pm\frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{10}$ vorausgesetzt. Die Anzahl der Umläufe unserer Kurve um $O'$ wird 5, die Zeit, in der der Abstand $\varrho$ auf den $e^{\text{ten}}$ Teil seines Anfangswertes verkürzt bez. auf das $e$-fache angewachsen ist, wird $t = 20\tau$. Beide Kurven

für eine Verengerung bez. Erweiterung des Polhodiekegels die folgende erhalten haben:

$$\lambda_1 C > \lambda_2 A \quad \text{bez.} \quad \lambda_1 C < \lambda_2 A.$$

Es könnte hiernach unter Umständen vorkommen, daſs die Rotationsaxe der Figurenaxe zustrebt, auch wenn dieselbe keine Axe gröſsten Hauptträgheitsmomentes ist.

können als Spirallinien bezeichnet werden, stimmen aber nicht genau mit einer der bekannten Spiralformen überein.

Übrigens können wir uns auch ohne Rechnung von der gegensätzlichen Wirkung des Luftwiderstandes im Falle $C > A$ und $C < A$ Rechenschaft geben. Wir knüpfen dabei an die Figuren 86 und 87

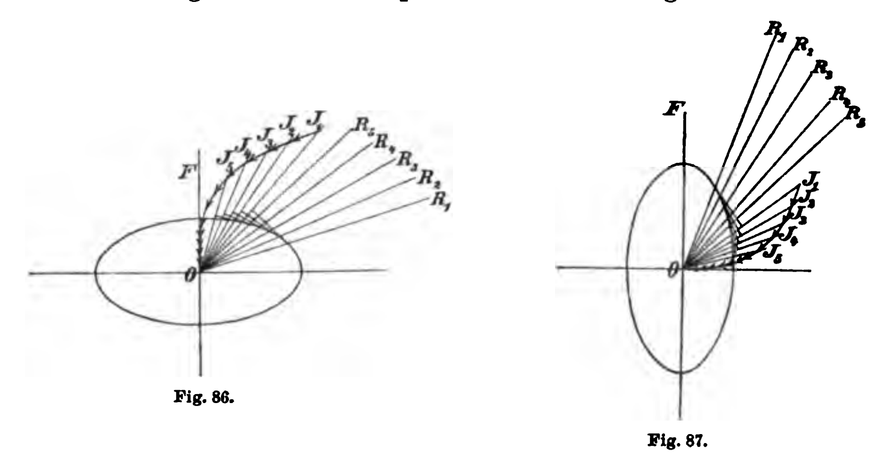


Fig. 86.

Fig. 87.

an, welche zunächst ebenso wie die Figuren 14 und 13 von pag. 107 und 106 zum Ausdruck bringen, daſs im Falle eines abgeplatteten Trägheitsellipsoides $C > A$ der Impulsvektor zwischen Figurenaxe und Rotationsvektor liegt, daſs dagegen im Falle eines verlängerten Trägheitsellipsoides der Rotationsvektor zwischen Impuls- und Figurenaxe enthalten ist. Nun besteht nach unserer Grundannahme die Wirkung des Luftwiderstandes in einem Moment, welches dem Drehungsvektor nach Gröſse und Axe proportional ist. Dieses haben wir mit dem jeweiligen Impulsvektor zusammenzusetzen, indem wir entgegengesetzt parallel zu der Richtung des Rotationsvektors an den Endpunkt des Impulsvektors einen Pfeil von der Länge $\lambda \Omega \Delta t$ antragen. *In Fig. 86 wird der Impulsvektor hierdurch der Figurenaxe genähert, in Fig. 87 von ihr entfernt.*

Der abgeänderten Lage und Gröſse des Impulses entspricht auch eine etwas andere Lage der Rotationsaxe und eine etwas verschiedene Gröſse der Rotationsgeschwindigkeit. In den Figuren ist die geometrische Konstruktion angedeutet, durch welche nach Früherem die Richtung der Rotationsaxe aus der der Impulsaxe bestimmt werden kann. Wir haben nun die obige Konstruktion zu wiederholen, indem wir das Moment des Luftwiderstandes entsprechend der abgeänderten Lage und Gröſse der Rotationsaxe dem Impuls hinzufügen. Wie man sieht fährt hierbei der Impuls und gleichzeitig auch der Rotationsvektor fort, sich

in Fig. 86 der Figurenaxe zu nähern, in Fig. 87 sich von ihr zu entfernen; gleichzeitig nimmt Impuls und Rotation an Gröfse ständig ab.

Um dies Verfahren streng zu machen, müfste man natürlich das zu Grunde gelegte Zeitintervall $\Delta t$ unbegrenzt abnehmen lassen, so dafs der Endpunkt des Impulses nicht einen gebrochenen Linienzug sondern eine kontinuierliche Kurve im Körper beschriebe. Überdies wäre es nötig, die Änderungen zu berücksichtigen, die der Impuls im Körper vermöge der „resultierenden centrifugalen Drehkraft" erfährt (vgl. pag. 144). Da aber diese nach Axe und Gröfse gleich dem vektoriellen Produkt aus Impuls- und Rotationsvektor ist, so steht sie auf der Ebene unserer Zeichnung anfangs senkrecht und beeinflufst weder die Gröfse des Impulses noch seine Neigung gegen die Figurenaxe. Die Wirkung jener Drehkraft besteht vielmehr nur darin, dafs die zusammengehörigen Lagen von Impuls- und Rotationsaxe um einen mit fortschreitender Bewegung wachsenden Winkel aus der Zeichenebene herausdrehen werden, derart dafs der Endpunkt des Impulses nicht eine ebene, sondern eine um die Figurenaxe spiralig gewundene Kurve beschreibt. Die genaue Gestalt dieser Kurve ist im übrigen in den obigen Rechnungen enthalten, da sich ja die Koordinaten des Impuls-Endpunktes relativ zum Körper nur durch die Faktoren $A$ und $C$ von den Komponenten $p$, $q$, $r$ des Rotationsvektors unterscheiden.

Aber auch die Gestalt der vom Impuls-Endpunkt *im Raume* beschriebenen Kurve ist nach dem vorstehenden im wesentlichen klar. Gegen den Raum verschiebt sich der Impuls-Endpunkt jeweils entgegengesetzt parallel der Rotationsaxe. Diese selbst nähert sich nach den vorigen Figuren mehr und mehr der Impulsaxe und dreht sich überdies um deren augenblickliche Lage, da sich die Figurenaxe um die augenblickliche Lage der Rotationsaxe dreht und durch die Lage von Figuren- und Impulsaxe auch die Lage der Rotationsaxe bestimmt ist. Man schliefst hieraus, dafs der Endpunkt des Impulsvektors im Raum eine Schraubenlinie von abnehmender Weite der Windungen um eine gewisse mittlere Richtung beschreiben mufs, wie sie etwa durch die nebenstehende Figur*) schematisch angedeutet wird. Der Impulsvektor bleibt also nicht wie bei der idealen Poinsot-Bewegung im Raume genau konstant, wohl aber bleibt seine mittlere Richtung konstant und die Schwankungen um die mittlere Lage nehmen im Verlauf der Bewegung ab.

O

Fig. 88.

Die Bewegung der Figurenaxe im Raume erweist sich wieder für

*) Die Spirallinie geht natürlich abwechselnd hinter und vor der Mittellinie vorbei, was in der Figur nicht deutlich genug zum Ausdruck kommt.

die beiden Fälle $C > A$ und $C < A$ grundsätzlich verschieden. Im ersteren Falle strebt die Figurenaxe einer Richtung zu, die mit der schlieſslichen Richtung der Rotationsaxe, also auch mit der der Impulsaxe übereinstimmt, im letzteren Falle steht sie schlieſslich senkrecht auf diesen Richtungen. Bezeichnen wir also etwa die mittlere Richtung der Impulsaxe im Raume als die Vertikale so können wir sagen: *Bei dem abgeplatteten Kreisel wird die Figurenaxe durch den Luftwiderstand aufgerichtet, bei dem verlängerten wird sie gesenkt.* Nachdem die Bewegung erloschen ist, d. h. nach unendlich langer Zeit steht die Figurenaxe im ersten Falle vertikal, im zweiten horizontal.

Mit Rücksicht auf den Luftwiderstand müssen wir unsere frühere Stabilitätsunterscheidung beim symmetrischen Kreisel (vgl. pag. 132 und 133) einer grundsätzlichen Revision unterziehen. Wir sagten früher: *die gleichförmige Rotation um die Figurenaxe ist eine stabile, die um eine äquatoriale Axe eine labile Bewegungsform.* Beides ist nur halb richtig, wenn wir an die Wirkung des Luftwiderstandes denken. Wir erteilen dem Kreisel eine Rotation genau um die Figurenaxe. Diese ist auch bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes eine mögliche permanente Bewegungsform, insofern als die Rotationsaxe im Körper und im Raume ungeändert bleibt und nur die Rotationsgeschwindigkeit allmählich abnimmt. Fand die anfängliche Rotation aber nicht genau um die Figurenaxe statt oder wird sie durch einen Zusatzimpuls etwas abgelenkt, so verhält sich der abgeplattete Kreisel umgekehrt wie der verlängerte. Beim abgeplatteten Kreisel strebt die Rotationsaxe vermöge des Luftwiderstandes, sich mit der Figurenaxe zu vereinigen, und steht alsbald merklich im Raume still. Beim verlängerten Kreisel entfernt sich die Rotationsaxe, wenn sie anfangs auch nur beliebig wenig von der Figurenaxe abwich, mehr und mehr von dieser, desgleichen die Impulsaxe. Oder, anders ausgedrückt: Die Figurenaxe, die anfangs merklich mit der Rotations- und der Impulsaxe zusammenfiel, stellt sich im Verlaufe der Bewegung schlieſslich senkrecht dazu. Wir erkennen so: *Die Rotation um die Figurenaxe ist mit Rücksicht auf den Luftwiderstand bei dem abgeplatteten Kreisel stabil, bei dem verlängerten labil.* Das Umgekehrte gilt für die Rotation um eine äquatoriale Axe.

Die vorstehenden Ausführungen decken sich, soweit sie analytischen Charakters sind, teilweise mit Überlegungen, welche Stone*) im Hinblick auf die Entwickelungsgeschichte der Erde angestellt hat. Von geologischer Seite ist vielfach die Hypothese ausgesprochen, daſs

*) On the possibility of a change in the position of the earth's axis due to a frictional action connected with the phenomena of the tides. Monthly notices of the astronomical Society, London, März 1867.

die Rotationsaxe der Erde in früheren geologischen Perioden einmal eine andere Lage im Erdkörper gehabt haben möge. Läſst sich diese Annahme mit der Thatsache, daſs die Rotationsaxe jetzt fast genau mit der Polaraxe zusammenfällt, auf Grund einer Reibungswirkung von der Art des hier vorausgesetzten Luftwiderstandes (Gezeitenreibung) vereinen? Da die Erde ein abgeplatteter symmetrischer Kreisel und ihre Polaraxe eine Axe gröſsten Hauptträgheitsmomentes ist, wäre es nach dem Vorhergehenden an sich möglich. Indessen werden wir im nächsten Kapitel mit Rücksicht auf die zahlenmäſsigen Umstände des Vorganges zu einer negativen Beantwortung der gestellten Frage geführt werden. —

Wir ergänzen die obigen Betrachtungen nunmehr durch Berücksichtigung der Schwere. Dafür wollen wir aber im Folgenden von der Ungleichheit der Trägheitsmomente absehen, also einen schweren *Kugelkreisel* betrachten. Während bei dem kräftefreien Kugelkreisel die Rotation auch bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes dauernd um eine im Raum und im Körper feste Axe stattfindet, wird beim schweren Kugelkreisel das Endergebnis sein müssen, daſs die durch $O$ gehende Schwerpunktsaxe schlieſslich in allen Fällen senkrecht nach unten weist. Den Prozeſs, durch welchen dieses erzielt wird, werden wir näherungsweise darzulegen haben.

Bei dem schweren Kreisel ist es, wie öfter bemerkt, bequem, die Eulerschen Winkel und die Lagrangeschen Gleichungen zu benutzen. Wir bestimmen zunächst die in den Lagrangeschen Gleichungen vorkommenden Komponenten (oder Momente) des Luftwiderstandes hinsichtlich der drei Koordinaten $\varphi, \psi, \vartheta$. Sie mögen $\Phi, \Psi, \Theta$ heiſsen und sind den senkrechten Projektionen des Drehungsvektors (oder des in Fig. 76 verdeutlichten, aus den Strecken $\varphi', \psi', \vartheta'$ bestehenden Linienzuges) auf die Figurenaxe, die Vertikale und die Knotenlinie proportional. Nennt man den Proportionalitätsfaktor wie früher $\lambda$, so findet man nach Fig. 76:

$$(8) \quad \Phi = -\lambda(\varphi' + \psi' \cos\vartheta), \quad \Psi = -\lambda(\psi' + \varphi' \cos\vartheta), \quad \Theta = -\lambda\vartheta'.$$

Die zugehörigen Impulskomponenten heiſsen $N$, $n$ und $[\Theta]$; wie z. B. aus den Gl. (2) des vierten Paragraphen hervorgeht, hat man im Falle des Kugelkreisels:

$$(9) \quad N = A(\varphi' + \psi' \cos\vartheta), \quad n = A(\psi' + \varphi' \cos\vartheta), \quad [\Theta] = A\vartheta'.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen lauten, wenn $T$ die lebendige Kraft des Kugelkreisels bedeutet:

$$\frac{dN}{dt} = \Phi, \quad \frac{dn}{dt} = \Psi, \quad \frac{d[\Theta]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = P \sin\vartheta + \Theta.$$

Mit Rücksicht auf (8) und (9) und den in Gl. (4) des vierten Paragraphen angegebenen Wert von $\partial T/\partial \vartheta$ können wir schreiben:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\lambda}{A}N, \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{\lambda}{A}n, \tag{10}$$

$$A\vartheta'' + \lambda\vartheta' = P\sin\vartheta - \frac{(n - N\cos\vartheta)(N - n\cos\vartheta)}{A\sin^3\vartheta}. \tag{11}$$

Die Gleichungen (10) bedingen, ähnlich wie beim kräftefreien Kreisel, eine exponentielle Abnahme der Impulskomponenten nach dem Gesetze:

$$N = N_0 e^{-\frac{\lambda t}{A}}, \quad n = n_0 e^{-\frac{\lambda t}{A}}; \tag{12}$$

das Verhältnis beider Komponenten bleibt dabei konstant; denn es ist $N : n = N_0 : n_0$. Indem wir die Werte (12) einsetzen, vereinfacht sich (11) wie folgt:

$$A\vartheta'' + \lambda\vartheta' = P\sin\vartheta - e^{-\frac{2\lambda t}{A}} \frac{(n_0 - N_0\cos\vartheta)(N_0 - n_0\cos\vartheta)}{A\sin^3\vartheta}. \tag{13}$$

Wir gehen hier wie bei dem früheren Reibungsproblem auf „Präcessions-ähnliche Bewegungen" aus. Da bei der regulären Präcession $\vartheta = \text{const.}$ ist, wollen wir jetzt nach solchen Bewegungen fragen, für die $\vartheta'$ und $\vartheta''$ klein sind. In erster Näherung setzen wir daher die linke Seite gleich Null und folgen damit einem Verfahren, welches als „Methode der langsamen Bewegungen" auſserordentlich viele bewuſste oder unbewuſste Anwendungen auf allen Gebieten findet. Der Sinn dieses Verfahrens besteht darin, daſs man eine hinreichend langsame Bewegung näherungsweise als eine Aneinanderreihung von Gleichgewichtslagen auffaſst, daſs man also von der Trägheit des Systems, die offenbar um so weniger ins Gewicht fällt, je langsamer die Bewegung ist, absieht. Dies Verfahren liefert in vielen Fällen eine brauchbare erste Annäherung an den wirklichen Bewegungsverlauf, eine Annäherung, die wir im vorliegenden Falle durch Berechnung einer zweiten Näherung kontrollieren werden.

Wir bestimmen also $\cos\vartheta$ als Funktion von $t$ aus der Gleichung:

$$\left(\frac{n_0}{N_0} - \cos\vartheta\right)\left(\frac{N_0}{n_0} - \cos\vartheta\right) = \frac{AP}{n_0 N_0}\sin^4\vartheta\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}. \tag{14}$$

Wir setzen einen starken Anfangsimpuls voraus, nehmen also an, daſs $AP/N_0^2$ klein sei; von derselben Gröſsenordnung ist $AP/n_0 N_0$. Fällt der Anfangsimpuls überdies nahezu in die Richtung der Figurenaxe, so wird $n_0/N_0$ ein echter Bruch, der etwa dem Cosinus eines Hülfswinkels $\vartheta_0$ gleichgesetzt werden kann. Wir unterscheiden den Anfang der Bewegung ($t$ klein) und das Ende derselben ($t$ sehr groſs).

a) *$t$ klein.* Die rechte Seite von (14) ist wegen $AP/n_0 N_0$ klein; auf der linken Seite muſs daher einer der beiden Faktoren ebenfalls klein sein.

Dies kann nur der Faktor $\frac{n_0}{N_0} - \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \cos\vartheta$ sein. Wir setzen dementsprechend $\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 + \varepsilon$ und vernachlässigen höhere Potenzen von $\varepsilon$. Aus (14) folgt:

$$-\varepsilon\left(\frac{1}{\cos\vartheta_0} - \cos\vartheta_0\right) = \frac{AP}{n_0 N_0}\sin^4\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}},$$

$$\varepsilon = -\frac{AP}{N_0^2}\sin^2\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}$$

und

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \frac{AP}{N_0^2}\sin^2\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}. \tag{15}$$

Mit dem gleichen Grade der Annäherung gilt:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{AP}{N_0^2}\sin\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}. \tag{15'}$$

Wir schlieſsen daraus, daſs zu Beginn der Bewegung $\vartheta$ wächst, die Figurenaxe also sich senkt, wenn $P$ positiv ist, d. h. wenn der Schwerpunkt auf der positiven Figurenaxe liegt. Im umgekehrten Falle nimmt $\vartheta$ ab, die Figurenaxe hebt sich also, während die Schwerpunktsaxe, die mit der negativen Figurenaxe identisch ist, sich senkt. Der Anfangswert $\vartheta$ stimmt ungefähr mit unserem Hülfswinkel $\vartheta_0$ überein.

b) *t groſs*. Das Produkt $\frac{AP}{n_0 N_0} e^{\frac{2\lambda t}{A}}$ wird beliebig groſs, wenn $t$ über alle Grenzen wächst. Da die linke Seite von (14) endlich bleibt, muſs $\sin\vartheta$ mit wachsendem $t$ klein werden; $\cos\vartheta$ wird daher gleich $\pm 1$. Für $\cos\vartheta = +1$ wird die linke Seite von (14) gleich

$$-\frac{(N_0 - n_0)^2}{n_0 N_0},$$

für $\cos\vartheta = -1$ wird sie gleich

$$+\frac{(N_0 + n_0)^2}{n_0 N_0}.$$

Vergleicht man die Vorzeichen der rechten und linken Seite in (14), so erkennt man, daſs $\cos\vartheta = +1$ im Falle $P < 0$, $\cos\vartheta = -1$ im Falle $P > 0$ gilt. In beiden Fällen ist die Schwerpunktsaxe gegen Ende der Bewegung senkrecht nach unten gerichtet. Die formelmäſsige Darstellung von $\vartheta$ gegen Ende der Bewegung lautet daher:

$$\begin{cases} P > 0 \qquad \sin\vartheta = \pi - \vartheta = \sqrt{\dfrac{N_0 + n_0}{\sqrt{AP}}}\, e^{-\frac{\lambda t}{2A}}, \\ P < 0 \qquad \sin\vartheta \phantom{= \pi - \vartheta} = \vartheta = \sqrt{\dfrac{N_0 - n_0}{\sqrt{-AP}}}\, e^{-\frac{\lambda t}{2A}}. \end{cases} \tag{16}$$

Der graphische Verlauf der durch (14) bestimmten Abhängigkeit zwischen $\vartheta$ und $t$ wird schematisch durch die beiden Kurven der Fig. 89 veranschaulicht.

Natürlich ist es noch keineswegs ausgemacht, daſs unsere durch ziemlich willkürliche Vernachlässigung einiger Glieder der Differentialgleichung (13) gefundenen Formeln den wirklichen Verlauf der Präcessions-ähnlichen Bewegung approximieren. Jedenfalls ist hierzu noch der Nachweis erforderlich, daſs die vernachlässigten Glieder thatsächlich klein gegenüber den beibehaltenen ausfallen. Indem wir jetzt nachträglich diesen Nachweis liefern, werden wir gleichzeitig die Möglichkeit zeigen, die bisherigen Annäherungen schrittweise zu verbessern.

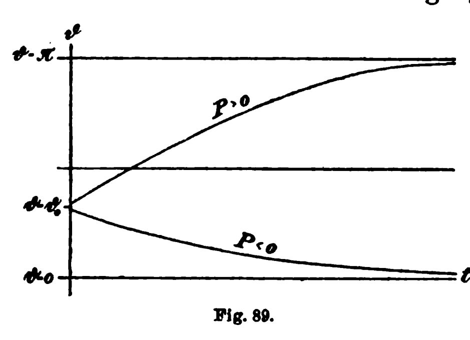


Fig. 89.

a) $t$ *klein*. Wir berechnen die linke Seite der Gl. (13) auf Grund der Formel (15'). Es ergiebt sich

$$A\vartheta'' + \lambda\vartheta' = \frac{6\lambda^2}{A} \cdot \frac{AP}{N_0^2} \sin\vartheta_0 \, e^{\frac{2\lambda t}{A}}. \tag{17}$$

Das Verhältnis dieses Ausdrucks zu dem ersten Gliede der rechten Seite von (13), welches wir näherungsweise gleich $P\sin\vartheta_0$ schreiben können, wird

$$6\,\frac{\lambda^2}{N_0^2}\,e^{\frac{2\lambda t}{A}}.$$

Die Gröſsenordnung dieses Verhältnisses wird, da bei kleinem $t$ die Exponentialgröſse nur mäſsige Werte hat, durch die Zahl $\lambda^2/N_0^2$ bestimmt. Zufolge der Einführung des Proportionalitätsfaktors $\lambda$ bedeutet aber $2\pi\lambda$ denjenigen Zusatzimpuls, welchen der Luftwiderstand bei einer vollen Umdrehung um irgend eine Axe ausübt. Wir dürfen annehmen, daſs dieser erheblich kleiner ist, als der Eigenimpuls des Kreisels oder anders ausgedrückt, daſs die Trägheitswirkungen der Luft äuſserst gering sind verglichen mit den Trägheitswirkungen des Kreisels. Unsere Kontrolle der obigen Näherungslösung hat also ein befriedigendes Ergebnis gehabt, da sie zeigt, daſs die vernachlässigten Glieder der Differentialgleichung in der That von geringerer Ordnung wie die beibehaltenen waren.

Die bisherige Lösung läſst sich jetzt leicht durch Berücksichtigung der linken Seite von (13) korrigieren. Wir setzen, auſser in dem Aus-

schlag gebenden Gliede $n_0 - N_0 \cos\vartheta$, überall in Gl. (13) unsere erste Näherung (15) ein; für die linke Seite benutzen wir dabei den Ausdruck (17); auf der rechten Seite haben wir nach (15) zu setzen:

$$\sin\vartheta = \sin\vartheta_0 \left(1 + \frac{AP}{N_0^2}\cos\vartheta_0 e^{\frac{2\lambda t}{A}}\right),$$

$$N_0 - n_0\cos\vartheta = N_0 \sin^2\vartheta_0 \left(1 + \frac{AP}{N_0^2}\cos\vartheta_0 e^{\frac{2\lambda t}{A}}\right).$$

Nach einigen formalen Vereinfachungen und bei Vernachlässigung höherer Potenzen der kleinen Glieder finden wir

$$n_0 - N_0\cos\vartheta = \frac{AP}{N_0}\sin^2\vartheta_0 e^{\frac{2\lambda t}{A}}\left\{1 + \left(\frac{3AP}{N_0^2}\cos\vartheta_0 - \frac{6\lambda^2}{N_0^2}\right)e^{\frac{2\lambda t}{A}}\right\}$$

und hieraus:

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \frac{AP}{N_0^2}\sin^2\vartheta_0 e^{\frac{2\lambda t}{A}}\left\{1 + \left(\frac{3AP}{N_0^2}\cos\vartheta_0 - \frac{6\lambda^2}{N_0^2}\right)e^{\frac{2\lambda t}{A}}\right\}. \tag{18}$$

Dies ist die gesuchte Korrektion von (15), die wir als eine zweite Näherung anzusehen haben, da nunmehr die Quadrate und Produkte der kleinen Gröſsen $AP/N_0^2$ und $\lambda^2/N_0^2$ beibehalten sind. Ersichtlich enthält unser Verfahren den Keim zu einer beliebig fortzusetzenden Potenzentwicklung nach eben jenen kleinen Gröſsen; wir brauchten nur, um zu dieser zu gelangen, aus der zweiten Näherung eine dritte etc. zu berechnen. Mit wachsendem $t$ würde sich die Konvergenz der Entwickelung verschlechtern, da in (18) die Potenzen der genannten kleinen Gröſsen von den entsprechenden Potenzen des Faktors $e^{2\lambda t/A}$ begleitet werden. Aus diesem Grunde und wegen der Umständlichkeit der so entstehenden Formeln begnügen wir uns mit der zweiten Näherung.

b) *$t$ groſs.* Auch hier gilt es zunächst, nachzuweisen, daſs in Gl. (13) die linke Seite bei der Aufstellung der Näherungslösung (16) vernachlässigt werden durfte. Wir berechnen zu dem Ende die vernachlässigten Terme nach Gl. (16) und finden, je nachdem $P \gtrless 0$ ist,

$$A\vartheta'' + \lambda\vartheta' = \pm\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{A}\sin\vartheta.$$

Das Verhältnis dieses Ausdrucks zu dem ersten Gliede $P\sin\vartheta$ der rechten Seite von (13) beträgt

$$\pm\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{AP}.$$

Wir dürfen annehmen, daſs $\lambda^2$ klein ist gegen die gleichbenannte Gröſse $AP$, was etwa auf die Annahme hinauskommt, daſs der Einfluſs des Luftwiderstandes auf die Kreiselbewegung klein ist gegenüber der Schwerewirkung. Jedenfalls ist unter der genannten Annahme die

Vernachlässigung der linken Seite von (13) in erster Näherung gerechtfertigt.

Gehen wir auch hier auf dem oben beschriebenen Wege zu einer zweiten Näherung über, so finden wir, wenn wir die Fälle $P \gtrless 0$ durch ein doppeltes Vorzeichen unterscheiden:

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{N_0 \pm n_0}{\sqrt{\pm A P}}}\, e^{-\frac{\lambda t}{2A}} \left(1 \pm \frac{1}{16}\frac{\lambda^2}{A P}\right), \tag{19}$$

also eine Formel desselben Charakters wie (16). Auch hier könnte man zu einer dritten etc. Näherung fortschreiten.

Die für die erste Näherung entworfene schematische Figur 89 kann uns ebensowohl zur Veranschaulichung dieser zweiten Näherung dienen. Übrigens werden sich dieser Figur noch Nutationen von der Periode der Kreiselumdrehung überlagern können, die von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängen und sich im Verlaufe der Bewegung abglätten. Unsere Kurve aus Fig. 89 kann sich nur bei geeignet gewählten Anfangsbedingungen (und auch da nur näherungsweise) einstellen, ähnlich wie die reguläre Präcession bei dem idealen Kreisel. Im Allgemeinen wird sie nicht die Integralkurve selbst sondern nur die „Leitlinie“ der Integralkurve darstellen, um welche sich die letztere mit abnehmenden Oscillationen herumschlängelt, ähnlich wie in den Figuren 79 und 80 des vierten Paragraphen.

Bei nicht kugelförmigem Trägheitsellipsoid liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Hier kann der Fall eintreten, dafs die Figurenaxe wegen der kombinierten Wirkung von Schwere und Luftwiderstand nach der Vertikalen hinstrebt, dafs sie aber wegen der Verschiedenheits der Hauptträgheitsmomente von dieser abgelenkt wird. Welcher dieser Einflüsse die Oberhand gewinnen wird, läfst sich ohne ein tieferes Eingehen nicht entscheiden.

## § 8. Die Elastizität des Kreiselmaterials.

So unentbehrlich der Begriff des starren Körpers für Naturwissenschaft und Technik ist, so sicher ist es, dafs er in der Wirklichkeit nur grob angenähert wird. Auch der in Bewegung gesetzte Kreisel wird sich nicht nur wie ein starrer Körper als Ganzes bewegen, sondern er wird gleichzeitig den durch die Bewegung hervorgerufenen Spannungen etwas nachgebend sich deformieren. Die Frage ist nur, ob solche Formänderungen unter irgend welchen Umständen merklich werden. Diese Frage ist gerade in demjenigen Falle akut geworden, wo wir vielleicht am ehesten geneigt sein möchten, die Vorstellung der starren Konsti-

tution festzuhalten, im Falle unserer Erde. Nicht nur ist die Gestalt der Erde in dauernder Weise durch ihre Umdrehung beeinflufst und von derjenigen verschieden, die sie annehmen würde, wenn sie eines Tages zu rotieren aufhören würde; sondern die Gestalt der Erde ändert sich auch, wenn sich die Drehaxe im Erdkörper umlagert, also von ihrer normalen oder mittleren Lage, in der sie mit der Figurenaxe der Erde zusammenfällt, etwas abweicht. Direkt ist eine solche Formänderung natürlich nicht mefsbar; sie übt aber eine Rückwirkung auf die Bewegung der Erde, nämlich auf den Wechsel der Drehaxe im Erdkörper aus, eine Rückwirkung, die sehr wohl der Messung zugänglich ist. Wir kommen im nächsten Kapitel auf diese Verhältnisse im Zusammenhang zurück. Hier gilt es, die späteren Diskussionen vorzubereiten und zu zeigen, dafs entsprechende Fragen bei jeder Art Kreiselproblem auftreten, wenngleich ihnen bei den üblichen Abmessungen und Formen unserer Apparate kaum eine nennenswerte Bedeutung zukommen dürfte.

Indem wir die Verhältnisse der Erde im Auge behalten, betrachten wir einen Kreisel *von der Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoides.* Die Massenverteilung im Inneren des Ellipsoides sei homogen, den Schwerpunkt desselben denken wir uns unterstützt, sodafs wir nur die kräftefreie Bewegung zu betrachten haben, die beim starren symmetrischen Kreisel, wie wir wissen, eine reguläre Präcession ist. Unser Interesse werden wir auf die Präcessionsdauer und den Einflufs, den hierauf die Elastizität des Materials nimmt, richten.

Hinsichtlich der Benennung ist im Auge zu behalten, dafs gerade im Falle der Erde die hier zu studierende Präcessionsbewegung als *freie Nutation* (spezieller, sofern man vom Einflufs der Elastizität absieht, als *Eulersche Nutation*) bezeichnet wird, während man bekanntlich bei der Erde unter Präcession eine durch Sonnen- und Mondanziehung *erzwungene* Bewegung von aufserordentlich viel längerer Periode versteht. Dieser langsamen erzwungenen Präcession überlagert sich die sehr viel raschere Eulersche Nutation, unsere kräftefreie Präcession, so dafs die Gesamtbewegung den uns wohlbekannten Charakter der pseudoregulären Präcession annimmt. Übrigens bezeichneten wir auch bei der allgemeinen Untersuchung der pseudoregulären Präcession in Kap. V, § 2 die Schwankung des Kreisels gegen die Bewegung der erzwungenen regulären Präcession als Nutation; auch dort erweist sich diese Nutation gleichbedeutend mit der kräftefreien Präcession des dem Einflufs der Schwere entzogenen Kreisels, nämlich unter den Bedingungen, durch welche wir die pseudoreguläre Präcession definierten, dafs 1) der Eigenimpuls sehr grofs sei ($N^2$ grofs gegen $AP$)

und daſs 2) die Figurenaxe stets in der Nähe der Impulsaxe liege, Bedingungen, welche im Falle der Erde erfüllt sind.

Die gestaltlichen und Massenverhältnisse unseres Kreisels werden durch Angabe der folgenden, nach Voraussetzung positiven Verhältniszahl

$$\varepsilon = \frac{C - A}{A}$$

gekennzeichnet, welche wir die „*Elliptizität*" nennen. Aus der Elliptizität berechnet sich die numerische Excentrizität $e$ der Meridiankurve unseres Ellipsoides nach der Formel $e = \sqrt{2\varepsilon/(1+\varepsilon)}$. Für ein beliebiges Ellipsoid gilt nämlich, daſs das Trägheitsmoment um eine beliebige Hauptaxe gleich dem fünften Teil der Masse multipliziert mit der Summe der Quadrate der beiden anderen Hauptaxen wird. Bezeichnet also $b$ die in die Figurenaxe des Ellipsoides fallende kleine Hauptaxe, $a$ die in die Äquatorebene fallende groſse Hauptaxe der Meridianellipse, so hat man

$$A = \frac{M}{5}(a^2 + b^2), \quad C = \frac{M}{5}(a^2 + a^2)$$

und daher

$$\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

während die Definition der numerischen Excentrizität bekanntlich lautet:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Hieraus folgt leicht der oben angegebene Zusammenhang zwischen $e$ und $\varepsilon$.

Indem wir abermals an die Verhältnisse der Erde denken, *setzen wir $\varepsilon$ als kleine Zahl voraus;* die Gestalt des Ellipsoides weicht dann wenig von der Kugelgestalt ab (Sphäroid). Unter dieser Annahme schreiben wir die näherungsweise Gleichung der Oberfläche des Ellipsoides an. Wird $z$ nach der Figurenaxe, $x$ und $y$ nach zwei rechtwinkligen Axen der Äquatorebene gemessen, so haben wir zunächst ohne Vernachlässigung

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1.$$

Wir transformieren diese Gleichung in zentrische Polarkoordinaten, indem wir mit $r$ den Abstand eines Punktes der Oberfläche vom Mittelpunkt des Ellipsoides, mit $\Theta$ die Neigung des Radiusvektor $r$ gegen die Äquatorebene bezeichnen. Wir haben dann

$$z^2 = r^2 \sin^2\Theta, \quad x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\Theta,$$

also zufolge der obigen Ellipsoidgleichung

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1 - \cos^2\Theta}{b^2} + \frac{\cos^2\Theta}{a^2} = \frac{1}{b^2}(1 - e^2\cos^2\Theta)$$

und angenähert

(1) $$r = b\,(1 + \varepsilon \cos^2 \Theta).$$

Dies die ursprüngliche Kreiselgestalt. Wird nun der Kreisel in Rotation versetzt, so tritt eine Formänderung auf, die wir als klein voraussetzen können. Findet die Rotation gerade um die Figurenaxe statt, so wird das Ellipsoid noch etwas mehr abgeplattet: die Elliptizität $\varepsilon$ wird um einen kleinen Betrag $\varepsilon'$ vermehrt. Bei der Berechnung der hinzukommenden Elliptizität $\varepsilon'$, die nach den Grundsätzen der Elastizitätstheorie zu erfolgen hat, wird man von der ursprünglich vorhandenen Elliptizität $\varepsilon$ unbedenklich absehen, also die ursprüngliche Kreiselgestalt einfach als Kugel voraussetzen dürfen. Denn durch die kleine Abweichung $\varepsilon$ von der Kugelgestalt wird die hinzukommende Elliptizität $\varepsilon'$ nur in einer Gröſse zweiter Ordnung (von der Gröſsenordnung des Produktes $\varepsilon\varepsilon'$) beeinfluſst. Man kann dabei die Frage aufwerfen, welchen Radius man der Kugel geben soll, durch welche man zum Zweck der Berechnung von $\varepsilon'$ das ursprüngliche Ellipsoid mit den Hauptaxen $a$ und $b$ ersetzen will. Am nächsten liegt es, eine mittlere, zwischen $a$ und $b$ enthaltene Länge $m$ als Radius zu wählen, die man so bestimmt, daſs der Inhalt der Kugel gleich dem Inhalt des ursprünglichen Ellipsoides wird. Diese Forderung führt auf die Bedingung

$$m^3 = a^2 b.$$

Setzt man für $a$ den aus Gl. (1) mit $\Theta = 0$ folgenden Wert $a = b\,(1 + \varepsilon)$ ein, so wird

$$m^3 = b^3\,(1 + 2\varepsilon), \quad m = b\left(1 + \frac{2}{3}\,\varepsilon\right), \quad b = m\left(1 - \frac{2}{3}\,\varepsilon\right).$$

Die Gleichung des ursprünglichen Ellipsoides läſst sich daher folgendermaſsen schreiben:

(2) $$r = m\left(1 + \varepsilon\left(\cos^2 \Theta - \frac{2}{3}\right)\right),$$

während die Gleichung desjenigen Ellipsoides, in welches die Kugel vom Radius $m$ übergeht, die folgende sein wird

(2') $$r = m\left(1 + \varepsilon'\left(\cos^2 \Theta - \frac{2}{3}\right)\right).$$

Durch Superposition der beiden geringen Abplattungen $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ ergiebt sich als Gleichung unseres durch die Rotation deformierten Ellipsoides:

(3) $$r = m\left(1 + (\varepsilon + \varepsilon')\left(\cos^2 \Theta - \frac{2}{3}\right)\right).$$

Ähnlich können wir verfahren, wenn die Rotation um eine von der Figurenaxe abweichende Axe stattfindet. Der Winkel zwischen Figurenaxe und Rotationsaxe sei $\delta$ (vgl. Fig. 90 $\sphericalangle\, FOR$). Die nun

entstehende Abplattung wird sich symmetrisch um die Rotationsaxe $OR$ herum verteilen und kann wiederum so berechnet werden, als ob der Kreisel die ursprüngliche Form einer Kugel vom Radius $m$ hätte. Die hinzukommende Elliptizität $\varepsilon'$ hat dieselbe Gröfse wie vorher. Die Gleichung des aus der Kugel entstehenden Ellipsoides lautet

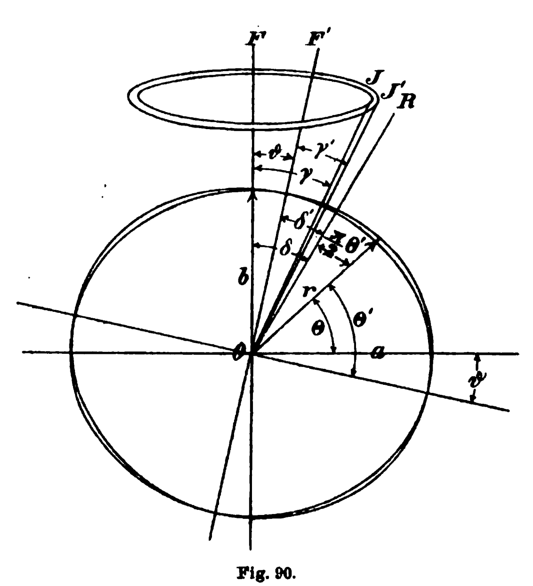


Fig. 90.

(4) $r = m\left(1 + \varepsilon'(\cos^2\Theta - \frac{2}{3})\right)$,

wo $\Theta'$ den Winkel des beliebigen Radiusvektors $r$ gegen die zur Rotationsaxe senkrechte Ebene bedeutet. Wie man aus Fig. 90 erkennt, ist

$$\Theta' = \Theta + \delta.$$

Hiermit ist auch in genügender Näherung die Formänderung bestimmt, welche das ursprüngliche Ellipsoid (Gl. (2)) durch Rotation um die Axe $OR$ erleidet. Die neue Form wird durch die Gleichung

$$(5) \qquad r = m\left(1 + \varepsilon\cos^2\Theta + \varepsilon'\cos^2(\Theta + \delta) - \frac{2}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right)$$

gegeben.

Dies ist mit derselben Annäherung die Gleichung eines abgeplatteten Ellipsoides, wie es die bisherigen Gleichungen (1) bis (4) waren. Die Figurenaxe des neuen Ellipsoides fällt aber nicht mehr mit der ursprünglichen Figurenaxe zusammen.

Zur Bestimmung der nunmehrigen Figurenaxe (und der zugehörigen Äquatorebene) haben wir die Gleichung

$$\frac{dr}{d\Theta} = 0,$$

das heifst:

$$\varepsilon\cos\Theta\sin\Theta + \varepsilon'\cos(\Theta + \delta)\sin(\Theta + \delta) = 0.$$

Den Winkel $\delta$ werden wir als *kleinen* Winkel voraussetzen. Wir dürfen dann statt der obigen Gleichung schreiben:

$$\varepsilon\cos\Theta\sin\Theta + \varepsilon'\cos\Theta\sin\Theta + \varepsilon'\delta(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta) = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} 2\Theta = -\frac{2\varepsilon'\delta}{\varepsilon + \varepsilon'}.$$

Die rechte Seite ist wegen des Faktors $\delta$ klein; daher erhält man für $\Theta$ zwei Werte $-\vartheta$ und $\pi/2-\vartheta$, die sich wenig von Null und von $\pi/2$ unterscheiden. Der erste kommt einer der in der Äquatorebene gelegenen Hauptaxen, der letztere der neuen Figurenaxe zu. Der Winkel zwischen der ursprünglichen und der neuen Figurenaxe ($\sphericalangle FOF'$ in Fig. 90) beträgt ebenfalls $\vartheta$ und man hat hinreichend genau

$$\vartheta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\,\delta < \delta. \tag{6}$$

Das so gefundene Resultat ist sehr anschaulich:

*Wäre das Material des Kreisels absolut starr, so würde die Massenverteilung nach wie vor symmetrisch um $OF$ bleiben ($\vartheta = 0$); wäre es absolut nachgiebig (Flüssigkeit), so würde es sich symmetrisch um die Drehaxe $OR$ herum gruppieren ($\vartheta = \delta$); bei jedem endlichen Grade von elastischer Widerstandsfähigkeit mufs sich ein mittlerer Zustand ausbilden, bei welcher eine zwischen $OF$ und $OR$ gelegene Axe Symmetrielinie der Massenverteilung wird ($\vartheta < \delta$).*

Aus der nunmehr bekannten Gestalt des Kreisels wird es leicht sein, immer unter der Annahme homogener Massenverteilung, auf Trägheitsmomente und Elliptizität des deformierten Sphäroids zu schliefsen. Und zwar werden wir auf dieselbe Elliptizität geführt werden, gleichviel, ob die Rotation um die Figurenaxe $OF$ oder um die davon abweichende Axe $OR$ stattfindet, ob also die Oberfläche durch Gl. (3) oder durch Gl. (5) gegeben ist.

In der That erhalten wir als Hauptaxen des deformierten Ellipsoides

$$\begin{aligned}
&\text{aus Gl. (3) für } \Theta = 0 &&: r = a' = m\left(1+\tfrac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),\\
&\quad\text{"}\qquad\quad\text{"}\quad \Theta = \tfrac{\pi}{2} &&: r = b' = m\left(1-\tfrac{2}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),\\
&\text{aus Gl. (5) für } \Theta = -\vartheta &&: r = a' = m\left(1+\tfrac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),\\
&\quad\text{"}\qquad\quad\text{"}\quad \Theta = \tfrac{\pi}{2}-\vartheta &&: r = b' = m\left(1-\tfrac{2}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),
\end{aligned}$$

wobei wegen der Kleinheit von $\vartheta$ gesetzt wurde: $\cos^2\vartheta = 1$, $\sin^2\vartheta = 0$. *Beide Ellipsoide sind also in erster Näherung kongruent, sie unterscheiden sich nur durch ihre Lage, nicht durch ihre Gestalt.* Dementsprechend werden auch ihre Hauptträgheitsmomente $A'$ und $C'$ und ihre Elliptizität $\mathsf{E}$ die gleichen. Man findet aus den vorstehenden Werten von $a'$ und $b'$ unmittelbar:

$$\left\{\begin{aligned}
A' &= \frac{M}{5}(a'^2+b'^2) = \frac{2M}{5}\left(1-\frac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\,\varepsilon\right),\\
C' &= \frac{M}{5}(a'^2+a'^2) = \frac{2M}{5}\left(1+\frac{2}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),\\
\mathsf{E} &= \frac{C'-A'}{A'} = \varepsilon+\varepsilon'.
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Wir sind jetzt in der Lage, die *Dauer einer freien Präcession des Kreisels* sowohl für ein starres, wie für ein durch die Rotation deformierbares Material zu berechnen. In ersterer Hinsicht könnten wir uns auf Rechnungen aus Kap. III, § 2 berufen. Nach Gl. (6') von pag. 151 ist die äquatoriale Komponente $p + iq$ des Drehungsvektors bei der regulären Präcession durch einen Exponentialausdruck gegeben, in dessen Exponenten $it$ mit dem Faktor

$$\frac{C - A}{A} r_0$$

multipliziert erscheint. Dieser Faktor muſs daher gleich $2\pi/T$ sein, wenn $T$ die Präcessionsdauer bezeichnet. Bedeutet andrerseits $\tau$ die Dauer einer Rotation des Kreisels, so ist der Rotationsvektor $\Omega$ gleich $2\pi/\tau$ und seine Komponente nach der Figurenaxe, die in der angezogenen Gleichung mit $r_0$ bezeichnet ist, gleich $\cos\delta \cdot 2\pi/\tau$, unter $\delta$ den in Fig. 90 so bezeichneten Winkel verstanden. Mithin hat man

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{C - A}{A} \frac{2\pi}{\tau} \cos\delta$$

oder, da man $\cos\delta$ hinreichend genau gleich 1 setzen darf:

$$T = \frac{\tau}{\varepsilon}. \tag{8}$$

Lehrreicher und für das folgende nützlicher ist indessen der folgende Weg zur Ableitung der gleichen Formel. Nach unserer Auffassung der Eulerschen Differentialgleichungen sagen diese aus, daſs der Impulsvektor im Raum bei der kräftefreien Bewegung nach Richtung und Gröſse ungeändert bleibt, daſs dagegen relativ gegen den Kreisel die Fortschreitungsgeschwindigkeit des Impuls-Endpunktes nach Richtung und Gröſse gleich dem vektoriellen Produkt von Impuls- und Drehungsvektor (der sog. „resultierenden zentrifugalen Drehkraft") ist. Bedeutet also $J$ den Vektor des Impulses, $|J|$ seine Länge, $dJ$ seine augenblickliche Änderung relativ gegen den Kreisel und bildet derselbe mit der Figurenaxe den Winkel $\gamma$ (vgl. Fig. 90), so hat man

$$\frac{dJ}{dt} = V(J, R) = |J|\,\Omega \sin(\delta - \gamma); \tag{9}$$

$\Omega$ ist die Länge des Rotationsvektors $R$ und kann wie oben gleich $2\pi/\tau$ gesetzt werden. Der Impuls-Endpunkt beschreibt nun im Kreisel während eines Präcessionsumlaufes einen Kreis vom Radius $|J| \sin\gamma$ um die Figurenaxe. Hierzu gebraucht er vermöge des angegebenen Wertes seiner Fortschreitungsgeschwindigkeit die Zeit

$$T = \frac{2\pi |J| \sin\gamma}{|J|\,\Omega \sin(\delta - \gamma)} = \tau \frac{\sin\gamma}{\sin(\delta - \gamma)}$$

oder bei hinreichender Kleinheit des Winkels $\delta$

(8') $$T = \tau \frac{\gamma}{\delta - \gamma}.$$

Diese Berechnung stimmt mit der in (8) gegebenen natürlich überein. Es ist nämlich $\operatorname{tg}\gamma$ gleich dem Verhältnis der äquatorialen Komponente des Impulses zu der nach der Figurenaxe genommenen und $\operatorname{tg}\delta$ gleich dem Verhältnis der entsprechenden Komponenten des Rotationsvektors. Da sich nun nach dem grundsätzlichen Zusammenhang zwischen Impuls- und Rotationsvektor entsprechende Komponenten beider Vektoren wie $A$ bez. wie $C$ verhalten, so ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\gamma : \operatorname{tg}\delta = A : C$$

oder hinreichend genau

(10) $$\gamma : \delta = A : C; \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{A}{C - A} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Überlegung, die zu Gl. (9) führte, läfst sich unmittelbar auf den elastisch deformierbaren Kreisel übertragen. Wir müssen dabei nur eine Voraussetzung ausdrücklich hervorheben: *Die Formänderung soll Zeit haben, sich vollständig in der oben beschriebenen Weise für jede Lage des Rotationsvektors auszubilden, bevor dieser Vektor seine Lage im Kreisel merklich verändert hat.* Diese Annahme ist in hohem Grade gerechtfertigt, da sich Spannungen und Formänderungen allgemein gesprochen mit der dem betr. Material eigentümlichen Schallgeschwindigkeit ausbreiten, während die beobachtbaren Bewegungserscheinungen (hier die Umlagerungen des Rotationsvektors) aufserordentlich viel langsamer erfolgen. Unter dieser Annahme werden wir sehen, dafs die allgemeine Bewegung auch des deformierbaren Kreisels als reguläre Präcession bezeichnet werden kann. Würde dagegen diese Annahme nicht zulässig sein, würde also die Abplattung nach Lage und Gröfse hinter der durch die jeweilige Lage der Rotationsaxe indizierten Abplattung zurückbleiben, so wäre die Bewegung viel komplizierter.

Wir unterscheiden die durch die jeweilige Rotation abgeänderte Symmetrielinie der Massenverteilung ($OF'$ in Fig. 90) als *instantane Figurenaxe* von der *ursprünglichen* oder *mittleren Figurenaxe* $OF$. Die Bewegung des deformierbaren Kreisels wird nun in jedem Augenblicke dieselbe sein, wie die eines starren Kreisels mit der wechselnden Figurenaxe $OF'$ und den abgeänderten Trägheitsmomenten $A'$ und $C'$. Dementsprechend wird der Impuls-Endpunkt, dessen Fortschreitungsgeschwindigkeit gegen das Kreiselmaterial wieder durch das vektorielle Produkt aus Impulsvektor ($J'$) und Rotationsvektor ($R$) gegeben ist, in jedem Augenblicke senkrecht gegen die durch die Vektoren $J'$ und $R$ gelegte Ebene fortschreiten. Jede Umlagerung von $J'$ bringt aber

eine Umlagerung von $R$ mit sich, und zwar mufs nach dem allgemeinen Zusammenhange zwischen Impuls- und Drehungsvektor der Endpunkt von $R$ parallel zu dem Impuls-Endpunkte fortschreiten. Jede Umlagerung des Rotationsvektors hat andrerseits eine Formänderung und eine neue Lage der instantanen Figurenaxe zur Folge. Da wir annehmen, dafs die Formänderung Zeit hat, sich vollständig auszubilden, liegt die instantane Figurenaxe dauernd in der durch $OF$ und $R$ bestimmten Ebene. In derselben Ebene liegt auch wegen des allgemeinen Zusammenhanges zwischen Impuls- und Rotationsvektor die Axe von $J'$. Die drei Axen $OF'$, $OJ'$ und $OR$ liegen also in der gleichen Meridianebene durch $OF$, die sich um $OF$ dreht. Da überdies die Winkelabstände der drei Axen erhalten bleiben, beschreibt jede derselben einen Kreiskegel und im besonderen der Impuls-Endpunkt $J'$ einen Kreis um $OF$. Diese Bewegung hat durchaus den Charakter einer regulären Präcession, nur dafs aufser der Impuls- und der Rotationsaxe auch die instantane Figurenaxe im Körper fortschreitet. Wir berechnen jetzt die Präcessionsdauer $T'$, indem wir wieder den Weg des Impuls-Endpunktes während eines Umlaufs durch seine Fortschreitungsgeschwindigkeit dividieren.

Der Weg beträgt jetzt $2\pi|J'|\sin(\vartheta+\gamma')$ (vgl. Fig. 90), die Fortschreitungsgeschwindigkeit ist

$$\frac{dJ'}{dt} = |J'|\,\Omega\sin(\delta'-\gamma'),$$

daher wird die Präcessionsdauer

$$T' = \frac{2\pi|J'|\sin(\vartheta+\gamma')}{|J'|\,\Omega\sin(\delta'-\gamma')} = \tau\frac{\sin(\vartheta+\gamma')}{\sin(\delta'-\gamma')}$$

oder hinreichend genau

$$T' = \tau\frac{\vartheta+\gamma'}{\delta'-\gamma'}. \tag{11}$$

Den hier auftretenden Winkelquotienten haben wir mit Rücksicht auf die Gl. (6) und (10) umzurechnen. Aus Gl. (6) folgt, da nach Fig. 90 $\delta = \vartheta + \delta'$ ist:

$$\vartheta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(\vartheta+\delta'), \qquad \vartheta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\delta'.$$

Gl. (10) lautet, für die deformierte Gestalt des Ellipsoides angeschrieben:

$$\gamma' : \delta' = A' : C'$$

und lehrt, dafs hinreichend genau gilt

$$\frac{\gamma'}{\delta'-\gamma'} = \frac{\delta'}{\delta'-\gamma'} = \frac{1}{\mathsf{E}} = \frac{1}{\varepsilon+\varepsilon'}.$$

Hiernach wird

$$\frac{\vartheta+\gamma'}{\delta'-\gamma'}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\,\frac{\delta'}{\delta'-\gamma'}+\frac{\gamma'}{\delta'-\gamma'}=\frac{1}{\varepsilon+\varepsilon'}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+1\right)=\frac{1}{\varepsilon}.$$

Unser obiges Resultat bezüglich der Präcessionsdauer $T'$ (Gl. (11)) läfst sich daher schreiben:

$$T'=\frac{\tau}{\varepsilon}, \tag{12}$$

in welcher Form es mit der früheren Gleichung (8) zusammenfällt. In Worten heifst dieses:

*Die Präcessionsdauer eines Kreisels von deformierbarem Material und sphäroidischer Gestalt berechnet sich nicht aus der Elliptizität seiner deformierten Gestalt*, (welche $\mathsf{E}=\varepsilon+\varepsilon'$ genannt wurde), *sondern aus der Elliptizität seiner ursprünglichen Form, die es vor der Rotation hatte und die es beim Erlöschen der Rotation wieder annehmen würde. Sie ist daher von der elastischen Nachgiebigkeit des Materials unabhängig und im besonderen gleich der Präcessionsdauer eines absolut starren Kreisels, dessen Elliptizität mit der ursprünglichen Elliptizität* $\varepsilon$ *des deformierbaren Kreisels übereinstimmt.*

Wir werden im folgenden Kapitel bei den geophysikalischen Anwendungen auf diesen Satz zurückkommen und werden ihn zum Ausgangspunkt für die Darstellung der Polschwankungen und für die Erklärung der sog. Chandlerschen Periode nehmen. Eine Schwierigkeit hat die Übertragung der vorstehenden Resultate auf die Verhältnisse der Erde nur insofern, als 1) die Erde ihrer Massenverteilung nach kein homogenes Rotationsellipsoid ist, sondern nach der Mitte hin dichter als auf der Oberfläche ist, und ferner insofern als 2) bei einer Deformation der Erde neben den elastischen Kräften auch die Gravitationswirkungen der einzelnen Teile auf einander wesentlich in Betracht kommen. Der erstgenannte Umstand bringt es mit sich, dafs alle Zahlenangaben, die wir später zu machen haben werden, mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind, entsprechend der Unsicherheit in den Annahmen über die Massenverteilung im Erdinnern. Die an zweiter Stelle genannte Schwierigkeit ist dadurch zu heben, dafs wir die im Vorstehenden mit $\varepsilon'$ bezeichnete Elliptizität bei der Erde als diejenige Elliptizität zu definieren haben werden, die eine Kugel von der Elastizität und der mittleren Dichte und Gröfse der Erde unter der *gemeinsamen* Wirkung der elastischen Kräfte und der Gravitationswirkungen annehmen würde, wenn sie mit der Geschwindigkeit der täglichen Erdumdrehung in Rotation versetzt wird.

Noch möge darauf hingewiesen werden, dafs die Voraussetzung eines nahezu kugelförmigen Kreisels, an der wir in diesem Paragraphen

festgehalten haben, nicht allein im Interesse der Anwendung auf den Erdkörper geboten war. Man übersieht vielmehr leicht, daſs gerade eine sphäroidische Masse oder, allgemein gesprochen, eine Masse von sphäroidischem Trägheitsellipsoid in Hinsicht auf die deformierende Wirkung der Zentrifugalkräfte besonders empfindlich sein wird.

## § 9. Die Elastizität der Unterlage.

In höherem Grade wie die Elastizität des Kreiselmaterials dürfte bei den gewöhnlichen Versuchen die Elastizität der Unterlage den Charakter der Kreiselbewegung beeinflussen. Man bemerkt sehr häufig ein Mitschwingen der Unterlage (Tischplatte), das sich sowohl dem Ohre wie dem Tastsinn deutlich bemerkbar macht. Um die Schwingungen einer Tischplatte zu erzeugen und zu unterhalten, ist aber Energie erforderlich. Diese muſs auf Kosten der Bewegungsenergie des Kreisels bestritten werden und wird teils im Innern der Tischplatte durch innere Reibung etc. in Wärme verwandelt, teils wird sie nach auſsen hin zerstreut, indem sich die Schwingungen der Tischplatte auf entferntere Gegenstände (durch die Beine des Tisches auf den Fuſsboden etc.) je länger je mehr übertragen. Durch das Mitschwingen der Tischplatte wird also die Kreiselbewegung gedämpft. Von allen übrigen Energie verzehrenden Kräften (Reibung etc.) werden wir bei der folgenden Darstellung natürlich absehen. Über die Schwingungsform der Tischplatte wollen wir die Annahme machen, daſs es sich um transversale Plattenschwingungen handelt, bei denen etwa die Stützpunkte der Platte auf den Tischbeinen festbleiben und jeder Punkt der Platte in vertikaler Richtung auf und ab schwingt. An sich ist allerdings auch eine horizontale Schwingung der Platte als Ganzes möglich, wobei die Beine des Tisches wechselnde Verbiegungen erfahren würden. Wir wollen aber annehmen, daſs hauptsächlich die erstere Form der Schwingung durch unsern Kreisel ausgelöst wird, was mit den gewöhnlichen Verhältnissen des Experimentes in Einklang zu sein scheint.

Um das Problem mathematisch zugänglich zu machen, ersetzen wir in Gedanken die mitschwingende Tischplatte durch einen einzelnen Massenpunkt, welcher um seine natürliche Gleichgewichtslage $O$ in vertikaler Richtung beweglich ist und nach dieser mittleren Lage durch eine seiner Entfernung von $O$ proportionale Kraft zurückgezogen wird. Die Gröſse dieser Kraft sowie die Gröſse der Masse wäre durch Versuche an der Tischplatte folgendermaſsen festzustellen: Man messe die vertikale Ausbiegung $\zeta$ der Tischplatte an der Stelle des Auflagepunktes des Kreisels auf Grund einer Belastung $K$ und berechne daraus, indem

man Proportionalität zwischen Ausbiegung und Belastung voraussetzt, diejenige Kraft $k$, die zur Ausbiegung $\zeta = 1$ (etwa 1 cm) gehört. Ferner bestimme man die Dauer der freien Schwingungen $\tau$ der Tischplatte und berechne daraus die „reduzierte schwingende Masse" der Tischplatte $m = \frac{\tau^2 k}{4\pi^2}$. Diese reduzierte Masse ist zugleich die Masse unseres materiellen Punktes, den wir an Stelle der Unterlage substituieren; die Kraft, mit der er in seine mittlere Lage $O$ zurückgezogen wird, ist $-k\zeta$. Für das Folgende ist es aber unerläfslich, auch die Dämpfung der Schwingungen der Tischplatte zu berücksichtigen, hervorgerufen teils durch Energieverwandlung im Innern der Platte, teils durch Energiezerstreuung nach aufsen, weil hiervon gerade der uns interessierende Verbrauch an Bewegungsenergie des Kreisels abhängt. Wir denken uns deshalb auch das logarithmische Dekrement der Schwingungen der Tischplatte bestimmt und nennen dasselbe $\frac{h\tau}{2m}$; darauf schreiben wir unserem Massenpunkte noch eine Kraft zu, die seiner Geschwindigkeit proportional und entgegengesetzt, nämlich gleich $-h\zeta'$ ist. Die freien Schwingungen unseres Massenpunktes werden alsdann in allen Stücken den freien Schwingungen der Tischplatte ähnlich. Sie sind durch die einfache Gleichung bestimmt:

$$m\zeta'' + h\zeta' + k\zeta = 0. \tag{1}$$

Wie aus der Einführung der Gröfsen $m$, $h$, $k$ hervorgeht, entspricht allgemein zu reden das erste Glied dieser Differentialgleichung der Trägheit, das zweite der Dämpfung, das dritte der Elastizität der Tischplatte. Wollen wir ein schematisches Bild unseres für die Tischplatte substituierten Massenpunktes haben, so können wir uns etwa folgende Vorrichtung denken: Eine massenlose Spiralfeder von vertikaler Axe ist am unteren Ende auf einer unnachgiebigen Unterlage befestigt und trägt am oberen Ende den Massenpunkt $m$. Die Feder ist durch eine Führungshülse an seitlichen Ausbiegungen behindert, kann aber in vertikaler Richtung verlängert oder zusammengedrückt werden. Der Verlängerung oder Zusammendrückung 1 widerstrebt sie dabei mit der Kraft $\mp k$; aufserdem wirkt im Innern der Feder oder an der Führungshülse ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand, welcher bei der Geschwindigkeit 1 die Gröfse $-h$ hat. Der am oberen Ende der Feder befestigte Massenpunkt $m$ dient seinerseits dem unteren Ende der Kreiselaxe als Stütze.

Unter dem Einflufs der Kreiselbewegung kommen indessen nicht die durch die vorstehende Differentialgleichung beschriebenen freien Schwingungen unseres Massenpunktes (Tischplatte) sondern gewisse erzwungene Schwingungen zustande. Bedeutet $R$ die Reaktion oder

den Druck des in Bewegung befindlichen Kreisels auf die Unterlage in vertikaler Richtung, so gilt für diese erzwungene Schwingung ersichtlich

$$(1') \qquad m\zeta'' + h\zeta' + k\zeta = R.$$

Die Gröſse von $R$ folgt aus den allgemeinen Impulssätzen, hier aus dem Satz für die vertikale Schwerpunktsgeschwindigkeit des Kreisels. Bedeutet $z$ die vertikale Koordinate des Schwerpunktes, von dem im Raume festen Punkt $O$ aus gezählt, so wird die Vertikalkomponente des Einzelimpulses (Schiebeimpulses) $Mz'$; ihre Änderungsgeschwindigkeit ist gleich der Summe der in vertikaler Richtung auf den Kreisel wirkenden äuſseren Kräften, d. h. der Schwere $-Mg$, wenn $M$ die Kreiselmasse ist, und dem Gegendrucke der Unterlage gegen den Kreisel $-R$. Man hat daher die Gleichung:

$$\frac{d}{dt} Mz' = -Mg - R$$

oder

$$(2) \qquad R = -M(g + z'')$$

ähnlich wie in dem Anhange zu Kap. VI Gl. (3) pag. 515. Aus Gl. (1') wird daher

$$(3) \qquad m\zeta'' + h\zeta' + k\zeta + Mz'' + Mg = 0.$$

Wir unterscheiden des weiteren zwischen dem im Raume festen Punkt $O$ (der natürlichen Lage unseres Massenpunktes $m$) und dem beweglichen Punkte $P$ (seiner augenblicklichen Lage zur Zeit $t$, die mit dem augenblicklichen Auflagepunkte des Kreisels auf der Unterlage zusammenfällt), wobei $OP$ gleich $\zeta$ ist. Von $P$ läuft die Figurenaxe, die Knotenlinie etc. aus; in Bezug auf diesen Punkt werden wir die Eulerschen Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ zählen. Die vertikale Schwerpunktskoordinate $z$ wird, wenn $E$ den Abstand $PS$ des Schwerpunktes vom Auflagepunkte bedeutet,

$$(4) \qquad z = \zeta + E\cos\vartheta$$

zu setzen sein. Gl. (3) kann daher auch so geschrieben werden:

$$(5) \qquad (m + M)\,\zeta'' + h\zeta' + k\zeta + ME\frac{d^2}{dt^2}\cos\vartheta + Mg = 0.$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, wie durch Vermittelung der Reaktion $R$ die Bewegung des Kreisels mit der Bewegung unseres Massenpunktes $m$ „verkoppelt“ ist.

Um die vollständigen Bewegungsgleichungen des Problems zu erhalten, haben wir nunmehr die Drehung des Kreisels um den (selbst vertikal beweglichen) Auflagepunkt $P$ zu betrachten. Als äuſsere Kraft kommt hierbei nur die Schwere in Betracht, die um die Knotenlinie das Moment $MgE\sin\vartheta$ giebt, da die Reaktion $R$ mit Bezug auf $P$ das Moment 0

hat. Hiernach bemifst sich die Änderung des Drehimpulses. Die Berechnung der Komponenten des letzteren geschieht nach der Regel der Lagrangeschen Gleichungen: Man bilde den Ausdruck der lebendigen Kraft und bestimme aus diesem die Impulskoordinaten durch Differentiation nach den Geschwindigkeitskoordinaten.

Der Ausdruck der lebendigen Kraft ist, da $P$ beweglich ist, von dem üblichen verschieden. Wir legen zu dem im festen Punkte $O$ konstruierten Koordinatensystem $xyz$ ein paralleles $x_1 y_1 z_1$ durch den Punkt $P$. Dann gilt für die Koordinaten irgend eines Massenteilchens $\Delta m$ des Kreisels

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1 + \zeta,$$

mithin

$$\frac{\Delta m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{\Delta m}{2}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \frac{\Delta m}{2}\zeta'^2 + \Delta m z_1' \zeta'.$$

Summiert man über die ganze Masse des Kreisels, so darf man $\zeta'$ vor das Summenzeichen ziehen. Man erhält so

$$T = T_1 + \frac{M}{2}\zeta'^2 + \zeta' \sum \Delta m z_1'.$$

Hier ist $T_1$ die lebendige Kraft des Kreisels bei ruhendem Auflagepunkte, also wie früher

$$T_1 = \frac{A}{2}(\vartheta'^2 + \psi'^2 \sin^2\vartheta) + \frac{C}{2}(\varphi' + \psi' \cos\vartheta)^2.$$

Ferner bedeutet $\sum \Delta m z_1$ die vertikale Schwerpunktskoordinate in dem System $x_1 y_1 z_1$, multipliziert in die Gesamtmasse des Kreisels; man hat also ähnlich wie in Gl. (4):

$$\sum \Delta m z_1 = ME \cos\vartheta, \quad \sum \Delta m z_1' = ME \frac{d}{dt}\cos\vartheta.$$

Mithin wird der Ausdruck der lebendigen Kraft:

$$T = \frac{A}{2}(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta\,\psi'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')^2 + \frac{M}{2}\zeta'^2 - ME\zeta'\vartheta'\sin\vartheta. \tag{6}$$

Bezeichnet man jetzt die drei Impulskomponenten nach den Koordinaten $\varphi$, $\psi$ und $\vartheta$ bezw. mit $N$, $n$ und $[\Theta]$, so findet man

$$N = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi'), \quad n = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A\sin^2\vartheta\,\psi' + \cos\vartheta\,N,$$

$$[\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = A\vartheta' - ME\zeta'\sin\vartheta.$$

Die beiden ersten Impulskomponenten haben dieselben Werte wie bei festem Stützpunkte. Setzt man für diese die Lagrangeschen Gleichungen in der Form:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \text{ etc.}$$

an, so findet man wie früher

$$N = \text{const.}, \quad n = \text{const.}$$

Dagegen lautet die dritte Lagrangesche Gleichung, nach dem Schema:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = MgE \sin\vartheta$$

gebildet, jetzt folgendermaſsen:

$$A\vartheta'' - ME\zeta'' \sin\vartheta - ME\zeta'\vartheta' \cos\vartheta - \frac{\partial T_1}{\partial \vartheta} + ME\zeta'\vartheta' \cos\vartheta$$
$$= MgE \sin\vartheta.$$

Der Wert von $\partial T_1/\partial\vartheta$ wurde z. B. in § 4 dieses Kapitels Gl. (4) in eine bequeme Form umgerechnet. Setzt man ihn in die vorige Gleichung ein, streicht die zwei gleichen Glieder der linken Seite gegen einander fort und dividiert durch $\sin\vartheta$, so ergiebt sich:

$$(8) \qquad \frac{A\vartheta''}{\sin\vartheta} + \frac{(N - n\cos\vartheta)(n - N\cos\vartheta)}{A\sin^4\vartheta} = ME(g + \zeta'').$$

Die Wirkung der Beweglichkeit des Stützpunktes oder, wie wir sagen können, seiner „Koppelung“ mit der nachgiebigen Unterlage, besteht hiernach einfach darin, daſs zu der Fallbeschleunigung $g$ auf der rechten Seite unserer Gleichung die Beschleunigung des Auflagepunktes hinzukommt. Die Bewegung um den vertikal veränderlichen Stützpunkt verläuft also ebenso, wie die Bewegung bei festem Stützpunkte, wenn man sich im letzteren Falle am Schwerpunkt auſser der Schwerkraft $Mg$ noch die veränderliche Kraft $M\zeta''$ angebracht denkt. Indem wir diesen Gedanken etwas weiter ausspinnen und gewissermaſsen umkehren, können wir sagen: Die Bewegung des schweren Kreisels um einen festen Stützpunkt verläuft ebenso, wie die Bewegung eines der Schwere nicht unterworfenen Körpers, dessen Stützpunkt mit der konstanten Beschleunigung $g$ in gerader Linie fortgeführt wird.

Jedenfalls enthält Gl. (8) zusammen mit Gl. (5) die vollständige analytische Formulierung unseres Problems und liefert über die gegenseitige Verkettung der beiden bewegten Systeme, Unterlage und Kreisel, den erforderlichen Aufschluſs. Bemerken wir noch: unser Problem hatte ursprünglich vier Grade der Freiheit, entsprechend den vier Lagenkoordinaten $\zeta, \varphi, \psi, \vartheta$. Durch die beiden Impulsgleichungen $n = \text{const.}$, $N = \text{const.}$ sind zwei Freiheitsgrade gewissermaſsen eliminiert, so daſs wir nur mehr zwei Unbekannte $\vartheta$ und $\zeta$ und zwei Bewegungsgleichungen (5) und (8) übrig behalten.

Übrigens hätten wir auch die Gl. (5) nach dem Schema der Lagrangeschen Gleichungen bilden können, wenn wir von der vollständigen lebendigen Kraft unseres gekoppelten Systems $T^* = T + \frac{m}{2}\zeta'^2$ aus-

gegangen wären und dementsprechend die folgende Lagrangesche Gleichung gebildet hätten:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \zeta'} - \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = K_\zeta.$$

Hierin setzt sich die auf die $\zeta$-Koordinate wirkende äufsere Kraft $K_\zeta$ aus den drei Teilen: $-k\zeta$, $-h\zeta'$, $-Mg$ zusammen. Man erhält so:

$$\frac{d}{dt}(M\zeta' - ME\vartheta' \sin\vartheta + m\zeta') = -h\zeta' - k\zeta - Mg,$$

was ersichtlich mit (5) übereinstimmt.

Es kommt nun darauf an, aus den Gleichungen (5) und (8) weitere Schlüsse zu ziehen. Hierbei werden wir uns von der Annahme leiten lassen, dafs es sich um *kleine* Schwingungen handelt. Dies lehrt, was die Unterlage betrifft, in allen Fällen der Augenschein; was die Kreiselbewegung betrifft, bedeutet unsere Annahme, dafs wir uns auf Bewegungen vom Charakter der pseudoregulären Präcession beschränken wollen. Es sind hiernach $\zeta$ und $\vartheta$ dauernd von gewissen mittleren Werten $\zeta_0$ und $\vartheta_0$ wenig verschieden, so dafs die Differenzen

$$Z = \zeta - \zeta_0, \quad \Theta = \vartheta - \vartheta_0$$

als kleine Gröfsen behandelt werden können. Ob das Gleiche für die Differentialquotienten

$$Z' = \zeta', \ \Theta' = \vartheta', \ Z'', \ \Theta''$$

gilt, lassen wir dahingestellt, da bei raschen Schwingungen (und um solche wird es sich handeln) die Differentialquotienten von höherer Gröfsenordnung wie $Z$ und $\Theta$ selbst sein könnten.

Bestimmen wir zunächst die schon genannten Mittelwerte $\zeta_0$ und $\vartheta_0$ passend. Diese seien gleich den möglichen stationären Werten unserer beiden Koordinaten, also gleich denjenigen Werten, die mit der Annahme

$$\zeta' = \zeta'' = \vartheta' = \vartheta'' = 0$$

nach unsern Gleichungen verträglich sind. Nach Gl. (5) und (8) ergiebt sich

$$k\zeta_0 + Mg = 0, \tag{9}$$

$$(N - n\cos\vartheta_0)(n - N\cos\vartheta_0) = AP\sin^4\vartheta_0; \tag{10}$$

$\zeta_0$ bedeutet, wie man hiernach sieht, die dauernde Einsenkung der Unterlage unter dem Einflufs des Kreiselgewichtes $Mg$ und der elastischen Widerstandsfähigkeit $k$ der Unterlage. Andrerseits ist $\vartheta_0$ diejenige Neigung der Figurenaxe, unter welcher bei gegebenem $N$, $n$ und $P = MgE$ eine genaue reguläre Präcession möglich ist. Um $\vartheta_0$ näher angeben zu können, dividieren wir (10) durch $N^2$ und berücksichtigen,

dafs bei der pseudoregulären Präcession $\frac{AP}{N^2}$ klein ist, sowie dafs der Impuls nahezu in die Richtung der Figurenaxe fällt. Von den beiden Faktoren linkerhand

$$1 - \frac{n}{N}\cos\vartheta_0, \quad \frac{n}{N} - \cos\vartheta_0$$

mufs daher einer, nämlich der letztere, klein sein; wir setzen ihn gleich $\varepsilon$, finden näherungsweise für den ersten Faktor

$$1 - \frac{n}{N}\cos\vartheta_0 = \sin^2\vartheta_0 = 1 - \frac{n^2}{N^2}$$

und berechnen nach (10)

$$(11) \qquad \varepsilon = \frac{AP}{N^2}\sin^2\vartheta_0 = \frac{AP}{N^2}\left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right), \quad \cos\vartheta_0 = \frac{n}{N} - \frac{AP}{N^2}\left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right).$$

Diese und nur diese Neigung der Kreiselaxe ist bei einem nahezu in die Figurenaxe fallenden Impuls verträglich sowohl mit einer völligen Ruhe der Unterlage wie mit völliger Schwankungslosigkeit der Figurenaxe.

Nach Einführung der neuen Variabeln $Z$ und $\Theta$ vereinfachen sich die Gleichungen (5) und (8) bei Vernachlässigung einiger offenbar relativ kleiner Glieder wie folgt:

$$(12) \qquad (m + M)Z'' + hZ' + kZ = ME(\cos\vartheta_0\Theta'^2 + \sin\vartheta_0\Theta'').$$

$$(13) \qquad \frac{A\Theta''}{\sin\vartheta_0} + \Theta\frac{\partial}{\partial\vartheta_0}\frac{(n - N\cos\vartheta_0)(N - n\cos\vartheta_0)}{A\sin^4\vartheta_0} = MEZ''.$$

Hier ist noch der Faktor von $\Theta$ in (13) auszuführen. Da der zu differentiierende Ausdruck nach (10) gleich $P$ ist, kann man unter Anwendung der Regel des logarithmischen Differentiierens schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta_0}\frac{(n - N\cos\vartheta_0)(N - n\cos\vartheta_0)}{A\sin^4\vartheta_0} = P\left\{\frac{N\sin\vartheta_0}{n - N\cos\vartheta_0} + \frac{n\sin\vartheta_0}{N - n\cos\vartheta_0} - \frac{4\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}\right\}.$$

Hier ist der erste Summand in der $\{\,\}$ der rechten Seite das Wesentliche. Derselbe ist nämlich nach (11) gleich

$$\frac{\sin\vartheta_0}{\frac{n}{N} - \cos\vartheta_0} = \frac{\sin\vartheta_0}{\varepsilon} = \frac{N^2}{AP\sin\vartheta_0},$$

während die beiden übrigen Summanden, die zusammen näherungsweise $-3\cos\vartheta_0/\sin\vartheta_0$ geben, dagegen vernachlässigt werden können. Man kann daher Gl. (13) mit hinreichender Genauigkeit so schreiben:

$$(14) \qquad \Theta'' + \frac{N^2}{A^2}\Theta = \frac{ME}{A}\sin\vartheta_0 Z''.$$

Dies ist eine *lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* zwischen den beiden Unbekannten $\Theta$ und $Z$. Gl. (12) ist dagegen

wegen des Gliedes $\Theta'^2$ auf der rechten Seite *nicht linear*. Die mathematische Behandlung nicht linearer Gleichungen stöfst aber auf grofse Schwierigkeiten; es ist daher wünschenswert nachzuweisen, dafs wir jenes Glied näherungsweise streichen können.

Betrachten wir zunächst unsere Gleichungen (12) und (14) unter der Annahme, dafs die Unterlage völlig unnachgiebig sei ($k = \infty$, $Z = Z' = Z'' = 0$, $kZ$ unbestimmt). Dann geht Gl. (14) über in

$$\Theta'' + \frac{N^2}{A^2}\Theta = 0$$

und integriert sich durch $\Theta = \frac{a \sin}{b \cos}\left\{\frac{N}{A}t\right\}$, so dafs die Periode der Schwankungen der Kreiselaxe gleich $2\pi\frac{A}{N}$, also bei grofsem $N$ klein wird. (Man vgl. hierzu Kapitel V § 2, Gl. (15), wo dieselbe Periode gefunden wurde.) Gl. (12) wird in diesem Falle nichtssagend, da wie bemerkt $kZ$ unbestimmt wird; in der That ist jene Gleichung alsdann bei der Bestimmung der Bewegung entbehrlich.

Annähernd wird nun auch bei etwas nachgiebiger Unterlage die Periode und die Form der Schwankung der Kreiselaxe dieselbe sein, wie bei völlig starrer. Jedenfalls werden wir, um die Gröfsenordnung von $\Theta'^2$ und $\Theta''$ in Gl. (12) abzuschätzen, den Wert von $\Theta$ bei starrer Unterlage zu Grunde legen können. Dann erkennen wir: Wir dürfen nicht behaupten, dafs wenn $\Theta$ klein ist, d. h. wenn die Schwingungsamplituden $a$ und $b$ kleine Zahlen sind, auch $\Theta'$ oder gar $\Theta''$ klein seien, weil bei der Differentiation der grofse Faktor $N/A$ bezw. $N^2/A^2$ hinzutritt. Wohl aber dürfen wir behaupten, dafs $\Theta'^2$ *klein ist gegen* $\Theta''$, da sich die Sinus- oder Cosinusbestandteile beider im Mittel verhalten wie $a^2 : a$ oder wie $b^2 : b$. Während also das Glied $\Theta'^2$ absolut genommen grofs sein kann, so ist es doch relativ gegen das Glied mit $\Theta''$ belanglos. Wir schliefsen daraus, dafs sein Einflufs auf den Verlauf der Bewegung klein ist und halten uns dementsprechend für berechtigt, dasselbe in Gl. (12) zu streichen.

Dem Folgenden dürfen wir jetzt die zwei linearen Differentialgleichungen

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} (M+m)\,Z'' + hZ' + kZ &= ME \sin\vartheta_0 \Theta'' \\ \Theta'' + \frac{N^2}{A^2}\Theta &= \frac{ME\sin\vartheta_0}{A} Z'' \end{aligned}\right.$$

zu Grunde legen. Ihre Diskussion geschieht nach bekannten Regeln, die bei der Methode der kleinen Schwingungen (vgl. Kap. V, § 8) ständig angewandt werden.

Man setze

$$(16)\qquad Z = Ce^{\lambda t}, \quad \Theta = Be^{\lambda t}$$

und bestimme das Verhältnis der beiden Schwingungsamplituden $C$ und $B$, sowie die Schwingungsfrequenz $\lambda$ durch Eintragen der vorstehenden Werte in die Gl. (15). Dabei ist es noch nötig, um vergleichbare, d. h. gleichbenannte Amplituden in der Rechnung zu haben, von der Amplitude des Winkels $\Theta$ etwa zu der Amplitude des Schwerpunktsausschlages oder, was noch bequemer sein wird, zu der Vertikalprojektion dieser Amplitude überzugehen. Wenn $B$ die Amplitude von $\Theta$, ist die Amplitude der Schwerpunktsbewegung $E \cdot B$ und die vertikale Projektion derselben $E \sin \vartheta_0 B$. Diese setzen wir gleich

$$(17)\qquad D = E \sin \vartheta_0 B.$$

Die Gleichungen (15) lauten nun, nach Eintragen der Werte (16) und (17):

$$(18)\qquad \begin{cases} (\lambda^2 + h'\lambda + k')\, C = \mu \lambda^2 D, \\ \left(\lambda^2 + \frac{N^2}{A^2}\right) D = \nu \lambda^2 C; \end{cases}$$

hierbei wurden die Abkürzungen benutzt:

$$(19)\qquad h' = \frac{h}{M+m}, \quad k' = \frac{k}{M+m}, \quad \mu = \frac{M}{M+m}, \quad \nu = \frac{ME^2 \sin^2 \vartheta_0}{A}.$$

Man bemerke hierbei, daſs $\nu$ ebenso wie $\mu$ eine reine Zahl und zwar ein echter Bruch ist. In der That wird nach einem bekannten Satz über Trägheitsmomente das Trägheitsmoment $A$ für den Stützpunkt gleich dem entsprechenden Trägheitsmoment für den Schwerpunkt vermehrt um $ME^2$; mithin ist $ME^2 < A$ und daher $\nu < 1$.

Aus den Gl. (18) folgert man:

$$(20)\qquad \frac{C}{D} = \frac{\mu \lambda^2}{\lambda^2 + h'\lambda + k'} = \frac{1}{\nu \lambda^2}\left(\lambda^2 + \frac{N^2}{A^2}\right).$$

Die beiden letzten Glieder dieser Gleichung liefern die Bestimmung von $\lambda$; $\lambda$ berechnet sich als *Wurzel der Gleichung vierten Grades,*

$$(21)\qquad \mu \nu \lambda^4 = \left(\lambda^2 + \frac{N^2}{A^2}\right)(\lambda^2 + h'\lambda + k'),$$

so daſs man vier mögliche Werte von $\lambda$ zur Verfügung hat, die wir $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ nennen und von denen je zwei konjugiert imaginär sein werden.

Bei der Diskussion der Wurzeln gehen wir von der naturgemäſsen Annahme aus, daſs die Unterlage ziemlich unnachgiebig sei ($k$ nicht mehr $\infty$, aber $k'$ recht groſs, im Besonderen groſs gegen $N^2/A^2$). Dann ist nach Gl. (21) notwendig

*entweder* $\lambda^2 + \frac{N^2}{A^2} \cdots$ sehr klein

*oder* $\lambda \cdots$ sehr grofs

Indem wir zunächst die erste Möglichkeit betrachten, setzen wir $\lambda^2 + N^2/A^2 = \varepsilon$, berechnen unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\varepsilon$ zunächst den Wert von $\varepsilon$ und bestimmen daraus zwei Wurzeln unserer Gleichung, deren Näherungswerte wir $\lambda_1$ und $\lambda_2$ nennen. Wir finden:

$$\varepsilon = \lambda^2 + \frac{N^2}{A^2} = \frac{\mu\nu \frac{N^4}{A^4}}{k' - \frac{N^2}{A^2} \pm ih' \frac{N}{A}},$$

oder, da $k'$ grofs gegen $N^2/A^2$, die rechte Seite also klein ist:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \pm i \frac{N}{A}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu\nu}{Q}\frac{N^2}{A^2}\left\{k' - \frac{N^2}{A^2} \mp ih'\frac{N}{A}\right\}\right) \tag{22}$$

mit der Abkürzung

$$Q = \left(k' - \frac{N^2}{A^2}\right)^2 + h'^2 \frac{N^2}{A^2}.$$

Die beiden andern Wurzeln unserer Gleichung finden wir durch Verfolgen der Annahme: $\lambda$ sehr grofs. Wir setzen etwa $1/\lambda = \varepsilon'$ und vernachlässigen $\varepsilon'^3$, $\varepsilon'^4$. Für $\varepsilon'$ ergiebt sich aus (21) mit Rücksicht darauf, dafs $k'$ grofs gegen $N^2/A^2$ sein sollte, die quadratische Gleichung:

$$1 - \mu\nu + h'\varepsilon' + k'\varepsilon'^2 = 0;$$

ihre Lösung ist:

$$\varepsilon' = -\frac{h'}{2k'} \pm i\sqrt{\frac{1-\mu\nu}{k'} - \frac{h'^2}{4k'^2}}.$$

Hieraus ergeben sich die beiden folgenden Wurzelwerte:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_3 \\ \lambda_4\end{matrix}\right\} = \frac{-h' \mp i\sqrt{4(1-\mu\nu)k' - h'^2}}{2(1-\mu\nu)}. \tag{23}$$

Das Wurzelpaar $(\lambda_1, \lambda_2)$ läfst sich mit dem wenig verschiedenen Wertepaar $\pm iN/A$ in Vergleich setzen, welches (s. pag. 615) den Schwingungen der Kreiselaxe bei völlig unnachgiebiger Unterlage entspricht. Es unterscheidet sich von diesem namentlich durch den reellen Bestandteil

$$-\frac{1}{2}\frac{\mu\nu}{Q}\frac{N^4}{A^4}h',$$

der als Folge der dämpfenden Wirkung der Unterlage anzusehen ist. Daneben ist auch der imaginäre Teil durch das Mitschwingen der Unterlage etwas modifiziert. Andrerseits können wir das Wurzelpaar $(\lambda_3, \lambda_4)$ mit denjenigen Wurzelwerten vergleichen, welche den

Schwingungen der Unterlage bei Abwesenheit des Kreisels nach Gl. (1) zukommen. Man erkennt auch hier eine Rückwirkung des Kreisels auf die Schwingungen der Unterlage, eine Rückwirkung, die sich übrigens, wie man leicht sieht, am einfachsten als eine scheinbare Vermehrung der Masse $m$ des ursprünglichen schwingenden Systems auffassen läſst.

Von hier aus können wir hinsichtlich des Charakters der eintretenden Bewegung folgendes schlieſsen: Jedenfalls müssen sich die Schwingungen sowohl der Kreiselaxe wie der Unterlage aus Gliedern von der Form

$$e^{\lambda_1 t}, \quad e^{\lambda_2 t}, \quad e^{\lambda_3 t}, \quad e^{\lambda_4 t}$$

additiv mit konstanten Koeffizienten $C_i$ und $D_i$, deren Verhältnis durch Gl. (20) vorausbestimmt ist, zusammensetzen. Dabei werden sich die konjugierten Exponentialgröſsen paarweise zu trigonometrischen Funktionen vereinigen und zusammen je eine Schwingungszahl und einen Dämpfungsfaktor definieren. Insbesondere bestand die Schwingung der Kreiselaxe, wenn wir von der Einwirkung der Unterlage absehen, aus ungedämpften, rein periodischen Schwingungen von der Schwingungszahl $N/2\pi A$. *Durch die Mitwirkung der Unterlage wird diese Schwingungszahl etwas abgeändert, die Schwingung wird überdies gedämpft, so daſs sie allmählich absterben muſs; dann aber überlagern sich den genannten noch andere gedämpfte Schwingungen, die unter Voraussetzung einer ziemlich unnachgiebigen Unterlage ($k' > N^2/A^2$) wesentlich höhere Schwingungszahl haben.* Andrerseits sind, solange wir von der anregenden Wirkung des Kreisels auf die Unterlage absehen, die natürlichen Schwingungen der Unterlage gedämpfte Schwingungen von sehr groſser Schwingungszahl. *Durch die Mitwirkung des Kreisels wird ihre Schwingungszahl sowie ihre Dämpfung ebenfalls etwas abgeändert und es überlagern sich diesen Schwingungen noch Vibrationen von geringerer Schwingungszahl, deren Periode in der Nähe der natürlichen Schwingungsperiode der Kreiselaxe liegt.*

Es ist leicht einzusehen, daſs die langsamere der beiden Schwingungen, die der Eigenschwingung der Kreiselaxe naheliegt, in der Bewegung des Kreisels deutlicher zum Ausdruck kommen wird, wie in der Bewegung der Unterlage und daſs umgekehrt die schnellere Schwingung, die wir mit der Eigenschwingung der Unterlage verglichen hatten, in den Schwankungen der Unterlage stärker ausgeprägt sein wird, wie in denen des Kreisels. In der That zeigt Gl. (20), daſs für unser erstes Wurzelpaar $\lambda = \lambda_1$ oder $\lambda = \lambda_2$, für welches $\lambda^2 + N^2/A^2$ klein ist, auch $C$ klein gegen $D$ ist; daſs dagegen für das zweite Paar $\lambda = \lambda_3$ oder $\lambda = \lambda_4$, für welches $\lambda^2 + h'\lambda + k'$, wie man leicht nachrechnet,

gleich $\mu\nu\lambda^2$ ist, $C$ gleich $D/\nu$ wird, also gröfser als $D$ sein mufs. *Jedes unserer beiden Systeme, Kreisel und Unterlage, schwingt in derjenigen Periode stärker, die ihm die natürlichere ist.*

In der Beobachtung macht sich namentlich der Umstand geltend, dafs die Schwingungen des mit der Unterlage gekoppelten Kreisels gedämpfte Schwingungen sind. Er zeigt sich darin, dafs die kleinen Schwankungen der pseudoregulären Präcession bald absterben und dafs die stationäre Bewegung der reinen regulären Präcession ($Z = 0$, $\Theta = 0$ oder in unseren früheren Koordinaten geschrieben $\zeta = \zeta_0$, $\vartheta = \vartheta_0$) als Endzustand angestrebt wird. Wir sahen übrigens früher, dafs auch andere dissipative Einflüsse (Reibung im Stützpunkte) in ähnlicher Weise auf eine Abnahme der Nutationen und auf eine Vereinfachung des Bewegungsvorganges hinwirkten. Jedenfalls aber kommt dem Mitschwingen der Unterlage in dem nunmehr erläuterten Sinne bei dieser Erscheinung eine wesentliche Rolle zu.

## § 10. Anhang. Einflufs der Reibung auf den in der Horizontalebene spielenden Kreisel.

In dem Anhange zum vorigen Kapitel haben wir die Bewegung des auf der Horizontalebene frei beweglichen Kreisels unter Absehung von der Reibung behandelt. Indessen mufsten wir zum Schlufs jenes Anhanges darauf hinweisen, dafs die wirklich zu beobachtenden Bewegungen mit der dort gefundenen nur eine entfernte Ähnlichkeit haben. Der Grund liegt natürlich darin, dafs die Reibung, die wir dort vernachlässigt hatten, nicht eigentlich eine sekundäre korrigierende Bedeutung hat, sondern dafs sie, man mag die Unterlage noch so glatt herstellen wie man wolle (Spiegelglasscheibe), für den Charakter der Bahnkurve in erster Linie mafsgebend ist.

Da sich nun die Bahnkurve des horizontal beweglichen Kreisels besonders gut beobachten läfst (s. u.), da sie ferner wegen ihrer gesetzmäfsigen und schönen Gestalt ein besonderes Interesse beanspruchen darf, so müssen wir wünschen, unsere früheren Betrachtungen durch Berücksichtigung der Reibung soweit zu vervollständigen, dafs sie zur allgemeinen Erklärung der wirklichen Erscheinungen geeignet werden. Allerdings werden wir hierbei von quantitativen Berechnungen im Sinne von § 4 und 5 dieses Kapitels absehen und den Einflufs der Reibung nur qualitativ diskutieren; ferner werden wir von einer erneuten Diskussion des Luftwiderstandes etc. absehen, da dieser neben der gleitenden Reibung an Wichtigkeit zurücktritt.

Auch von dem jetzigen Problem gilt die Bemerkung, die wir früher für die Reibungswirkungen überhaupt gemacht haben: dafs

scheinbar geringfügige Nebenumstände den Charakter der Bewegung stark beeinflussen können. So ist es durchaus nicht gleichgültig, ob z. B. die auf der Unterlage gleitende Spitze mehr oder minder zugeschärft ist, ob die Unterlage gröfsere oder geringere Unebenheiten hat und Ähnliches. Besonders deutlich tritt die Wirkung solcher Verhältnisse bei einer Erscheinung hervor, die wir bei Benutzung einer Stahlspitze oft zu beobachten Gelegenheit hatten und die wir als den Vorgang des „Einwurzelns" bezeichnen möchten: Die Kreiselspitze gerät in irgend eine für das blofse Auge kaum erkennbare Vertiefung der Unterlage, in der sie weiterhin festgehalten wird; der Kreisel spielt nicht mehr auf der horizontalen Ebene, sondern wird durch eine Art unsichtbarer Pfanne gezwungen, sich um einen festen Punkt wie bei unserem ursprünglichen Kreiselproblem zu drehen. Wann und wie dieses Einwurzeln statthat, läfst sich im Voraus nicht bestimmen. Nur soviel ist a priori klar und wird durch die Beobachtung bestätigt, dafs eine zugeschärfte Spitze sich leichter einbohrt, wie eine abgerundete, die über vorhandene Vertiefungen der Unterlage ev. hinweggleitet, dafs eine rauhe und weiche Unterlage (Papier und besonders Pappe) für die gedachte Wirkung günstiger ist, wie eine harte und glatte Unterlage (Glasscheibe), ja daß eine berufste Glasscheibe, auf deren Oberfläche der Kreisel selbst durch Zusammenhäufung des Rufses Unebenheiten herstellt, wieder günstiger ist wie eine unberufste Scheibe, dafs ferner bei nahezu aufrechter Stellung von Figuren- und Drehaxe ein Einwurzeln häufiger stattfindet wie bei stärker geneigter Axe, weil im ersten Falle die zur Hemmung des Auflagepunktes erforderlichen Seitenkräfte kleiner sind und daher leichter von der Unterlage hergegeben werden können, wie im letzteren Falle, dafs endlich diese und andere Unregelmäfsigkeiten in der Bewegung um so leichter eintreten können, je kleiner die Abmessungen und die Massen des Kreisels sind, je kleiner der ursprünglich erteilte Impuls war oder je mehr derselbe im Laufe der Bewegung abgenommen hat. Im Folgenden werden wir diese Erscheinnng des Einwurzelns, über die sich theoretisch nicht viel sagen läfst, ausschliefsen; wir setzen also eine hinreichend abgerundete Spitze auf hinreichend ebener und regelmäfsiger Unterlage voraus.

Wir wollen nun den allgemeinen Bewegungsverlauf schildern, wie er unter dieser Einschränkung beobachtet wird. Da fällt zunächst, im Gegensatz zu den Ergebnissen unserer früheren reibungsfreien Betrachtungen, ins Auge, dafs die Horizontalprojektion des Schwerpunktes sich nicht, wie früher behauptet wurde, auf gerader Linie mit konstanter Geschwindigkeit bewegt (entsprechend einer dem Schwerpunkt anfänglich erteilten horizontalen Geschwindigkeit), bez. dafs (bei der anfänglichen

horizontalen Schwerpunktsgeschwindigkeit Null) der Schwerpunkt nicht auf einer festen Vertikalen bleibt, sondern dafs er vielmehr kreisförmige Bahnen beschreibt, die ungefähr der Bahn des Stützpunktes auf der Unterlage folgen. Es fällt ferner ins Auge, dafs die Bahn des Stützpunktes, die wir früher als Kreis mit aufgesetzten Zacken beschrieben, im Mittel nicht einen konstanten Radius hat, sondern dafs sich ihr Radius in der Regel verkleinert, unter Umständen, namentlich gegen Ende der Bewegung, allerdings sich gelegentlich auch erweitert. *Die Bahnkurve des Stützpunktes und ebenso die des Schwerpunktes* ist also jetzt als eine meist sich verengende *Spirallinie* zu beschreiben. Die einzelnen Windungen der Spirallinie legen sich in der Regel nicht ineinander, sondern mehr oder weniger nebeneinander, was auf die Deutlichkeit der entstehenden Figur sehr günstig wirkt. Die Spirallinie erscheint daher in einer gewissen Richtung seitlich auseinandergezogen. Man könnte in dieser Erscheinung die Folge einer dem Schwerpunkt ursprünglich erteilten Anfangsgeschwindigkeit erblicken wollen; indessen lehrt die Beobachtung in unzweideutiger Weise, dafs es sich hierbei lediglich um die Wirkung geringer Neigungen und Unregelmäfsigkeiten der Unterlage handelt. In der That konnten wir durch absichtliches Schiefstellen der Unterlage eine beliebig starke Auseinanderziehung der Spirallinie bewirken; die Richtung, in der die Windungen der Spirale fortschreiten, fällt dabei nicht mit der Richtung gröfster Neigung auf der Unterlage zusammen, sondern weicht vermöge der Kreiselwirkung in bestimmtem Sinne von jener ab. Hinsichtlich der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die aufeinander folgenden Kreise der Bahnkurve durchlaufen werden, der „Präcessionsgeschwindigkeit“, lehrt die Beobachtung in unzweideutiger Weise, dafs diese im Verlauf der Bewegung etwas zunimmt, dafs wir es also mit einer etwas beschleunigten Präcession zu thun haben. Endlich wollen wir noch als ein allgemeines Ergebnis der Beobachtung erwähnen, dafs die Nutationen der Kreiselaxe, welche zu den Auszackungen der Bahnkurve des Stützpunktes Anlafs geben und dadurch viel zu dem eigenartig interessanten Eindruck dieser Kurve beitragen, bei den Experimenten ihrer Gröfse nach immer sehr gering sind, so dafs sie den gleichmäfsigen Verlauf der Bahnkurve nur unwesentlich unterbrechen. Während wir also im vorigen Kapitel auf die Nutationen der Kreiselaxe besonderen Wert legten und sie durch trigonometrische Funktionen annäherten (bei strengerer Rechnung wären sie durch elliptische oder gar hyperelliptische Integrale darzustellen), werden wir jetzt bei Besprechung der Beobachtungen von diesen Nutationen überhaupt absehen.

Zum Beleg für die vorstehende Schilderung der zu beobachtenden Vorgänge geben wir in den nachstehenden Figuren zwei Beispiele von Bahnkurven des Stützpunktes zweier verschiedener Kreisel, welche beide

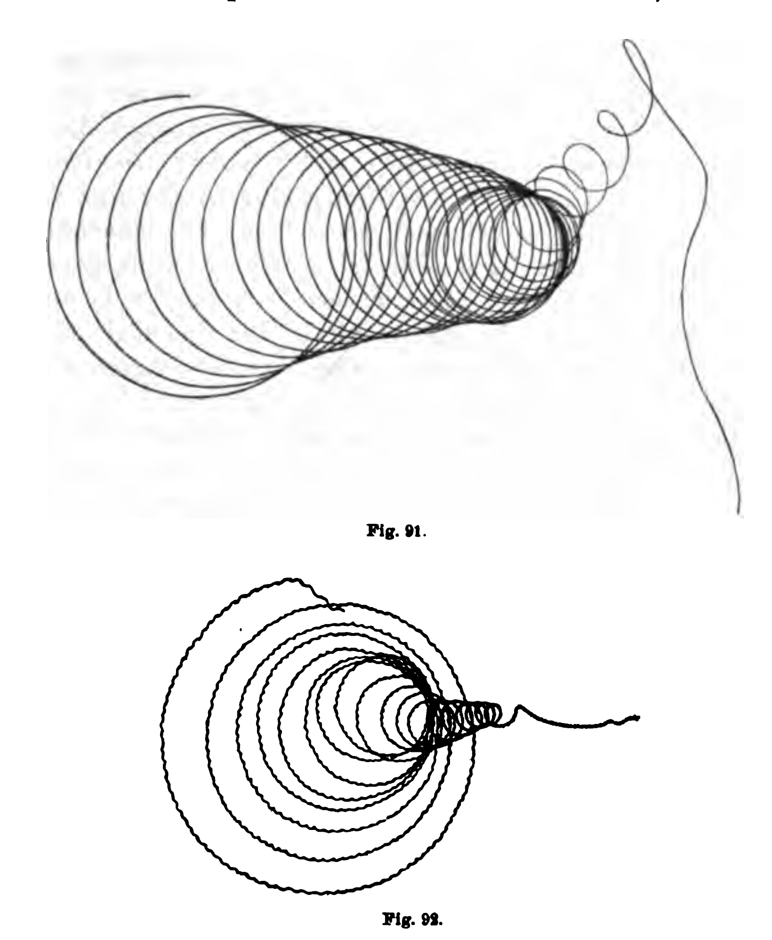


Fig. 91.

Fig. 92.

selbstthätig aufgezeichnet und alsdann photographisch reproduziert wurden, so daſs sie als unmittelbare Beobachtungsdokumente gelten können.

Die erste derselben wurde uns von Lord Kelvin gütigst zur Verfügung gestellt. Er lieſs sie entstehen, indem er auf dem Zeichenpapier einen Kreisel spielen lieſs, der nach unten hin in einen Bleistift auslief. Wir sehen hier die allmähliche Verengerung der Bahn des Stützpunktes, wie sie oben beschrieben wurde. Die einzelnen Windungen der spiraligen Bahnkurve legen sich in der Figur von links nach rechts neben einander. Die Verkleinerung des Krümmungsradius der Bahn

hält in diesem Beispiele bis zum Schlusse an, wo der Impuls bereits stark geschwächt ist und die Linienführung der Bahn etwas unsicher und unregelmäfsig wird. Die Kurve läuft schliefslich in einige gesetzlose Zacken aus, die dem Umfallen des Kreisels entsprechen. Über eine geeignete Herstellungsweise solcher selbstregistrierender Kreisel berichtet C. Barus*).

Wir selbst fanden es beim Studium dieser Erscheinungen bequem, eine berufste Spiegelglasplatte als Unterlage zu benutzen, auf der sich die Spur des Kreisels deutlich markiert, oder, wo wir eine stärkere Reibungswirkung wünschten, berufstes Schreibpapier. Als Kreisel dienten uns einige kleine, ziemlich leichte Uhrrädchen mit Axe (Abstand des Radmittelpunktes vom Stützpunkt ca. 1 cm, Durchmesser des Rädchens 5 cm, Gewicht 15 gr, die stählerne Auflagespitze bei den verschiedenen Exemplaren mehr oder minder zugeschärft). Von einem solchen Kreisel ist unsere zweite Figur auf einer berufsten Glasplatte aufgezeichnet; die hier gegebene Reproduktion ist das Negative des Originals, bei dem sich die Bahnkurve als helle Linie auf dem dunkeln Grunde des Rufses abhebt. Unsere zweite Figur zeigt deutlichere Nutationen wie die erste, im Übrigen läfst sie wieder die Spiralform der Bahnkurve und eine gewisse Seitenverschiebung erkennen, die namentlich gegen Ende der Bewegung als ein schon ziemlich unregelmäfsiger Auslauf in die Augen fällt.

Nachdem wir uns in solcher Weise durch das Experiment vorurteilslos orientiert haben, gehen wir nun an die theoretische Erklärung des Beobachteten.

Entsprechend der durch die Beobachtung festgestellten Geringfügigkeit der Nutationen werden wir über den Charakter der Bewegung die vereinfachende Annahme machen, dafs dieser in jedem Augenblick als *präcessions-ähnlich* angesehen werden kann. Unter einer regulären Präcession soll dabei jetzt eine Bewegung verstanden werden, bei der die Figurenaxe unter einem konstanten Winkel $\vartheta$ gegen die Vertikale geneigt ist und bei der sowohl der Schwerpunkt wie der Stützpunkt des Kreisels je einen Kreis mit konstanter Geschwindigkeit um dieselbe vertikale Gerade beschreiben. Präcessions-ähnlich wird eine Bewegung entsprechend dann heifsen, wenn der Neigungswinkel $\vartheta$ nur langsam veränderlich ist und wenn die Bahnen von Stützpunkt und Schwerpunkt nahezu kreisförmige und nahezu gleichförmig durchlaufene Spiralen werden.

Hinsichtlich der Gestalt des Kreisels an der Unterstützungsstelle

*) Science, September 1896.

mögen die beim Kreisel mit festem Punkte (§ 3) eingeführten Vorstellungen gültig bleiben: das untere Ende des Kreisels laufe in eine Halbkugel von kleinem Radius $\varrho$ aus; der tiefste Punkt der Halbkugel, welcher kein individueller Kreiselpunkt ist sondern in jedem Augenblicke wechselt, ist der *Stützpunkt* $P$. Während der senkrecht über $P$ gelegene *Mittelpunkt* $O$ der Halbkugel in § 3 ein fester Punkt war, beschreibt derselbe jetzt bei der regulären Präcession einen Kreis. Legen wir durch $P$ eine Ebene senkrecht zur augenblicklichen Rotationsaxe, so schneidet diese unsere Halbkugel in einem Kreise, den wir den „Stützkreis" nennen können; die sämtlichen Punkte dieses Kreises werden nämlich, sofern die augenblickliche Rotationsaxe im Kreisel nicht zu schnell wechselt, nach einander die Rolle des Stützpunktes übernehmen, indem sie durch die Rotation nach einander in die Lage des tiefsten Punktes der Halbkugel übergeführt werden.

Als Gesetz der Reibung — es soll sich lediglich um gleitende Reibung handeln — legen wir wieder das Coulombsche Gesetz (§ 2) zu Grunde. Der Reibungswiderstand $W$ im Stützpunkte ist dann eine horizontale Kraft von der Gröfse $\mu R$, wenn $R$ den Gegendruck der Unterlage gegen den Kreisel bedeutet. Letzterer ist, wie pag. 515 auseinandergesetzt wurde, allgemein gleich $M(g + z'')$, wo $z''$ die Schwerpunktsbeschleunigung bedeutet; im besonderen wird also bei einer präcessions-ähnlichen Bewegung hinreichend genau:

$$R = Mg, \quad W = \mu Mg. \tag{1}$$

Richtung und Sinn des Reibungswiderstandes hängen von der Richtung des Gleitens im Stützpunkte ab. Um letztere zu bestimmen, werden wir vorübergehend den Mittelpunkt $O$ der genannten Halbkugel zum „Bezugspunkte" wählen und die Bewegung des Kreisels in eine Parallelverschiebung, deren Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit des Punktes $O$ übereinstimmt, und eine Drehung um eine Axe durch $O$ zerlegen. Der Punkt $P$ erhält auf diese Weise die beiden Geschwindigkeiten $v$ und $V$; $v$ sei die Geschwindigkeit der Parallelverschiebung, oder die Geschwindigkeit von $O$, $V$ diejenige Geschwindigkeit, die $P$ vermöge der Drehung um $O$ erhält. Fällt, wie wir annehmen wollen, die augenblickliche Drehaxe durch $O$ nahezu mit der Figurenaxe zusammen, so liegt die Richtung von $V$ nahezu senkrecht zur Figurenaxe und es wird die Gröfse von $V$ gleich dem senkrechten Abstand des Punktes $P$ von der Figurenaxe, d. i. gleich $\varrho \sin \vartheta$ multipliziert mit der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit des Kreisels um $O$. Die Richtung des Gleitens wird dann durch geometrische Zusammensetzung der beiden Geschwindigkeiten $v$ und $V$ gefunden — durch geometrische,

nicht durch algebraische Zusammensetzung, weil, wie wir sehen werden, die Richtungen von $v$ und $V$ notwendig gegen einander geneigt sind. Man wird nun drei Fälle unterscheiden können, nämlich

$$1)\ V > v, \quad 2)\ V = v, \quad 3)\ V < v.$$

Fall 1) wird bei rascher Rotation des Kreisels der normale sein; je größer nämlich die Rotation, um so größer wird die der Rotation entsprechende Geschwindigkeit $V$ des Stützpunktes und um so kleiner wird, nach den Resultaten bei der reibungsfreien Bewegung zu urteilen, die Präcessionsgeschwindigkeit und daher auch die Geschwindigkeit $v$ werden. Bei hinreichend starker Rotation wird man sogar $v$ gegen $V$ vernachlässigen und die Richtung des Gleitens mit der Richtung von $V$ identifizieren können.

Fall 3) wird sich einstellen, wenn im Verlaufe der Bewegung die Eigenrotation durch die Reibung bereits beträchtlich geschwächt ist. Dann ist die Geschwindigkeit $v$ für die Bestimmung der Gleitrichtung maßgebend.

Im Grenzfalle 2) findet, wenn wir die Gleichung $V = v$ nicht nur als eine Bedingung für die Größe, sondern auch für die Richtung der (in entgegengesetztem Sinne zu zählenden) Geschwindigkeiten $v$ und $V$ auffassen, überhaupt kein Gleiten statt. Bei entgegengesetzter Gleichheit von $v$ und $V$ ist nämlich der augenblickliche Stützpunkt in relativer Ruhe zur Unterlage; es rollt dann der augenblickliche Stützkreis ohne Gleiten auf der Unterlage ab. Ob aber im Verlauf der Bewegung dieser Grenzfall sich überhaupt vorübergehend realisiert, ist zweifelhaft und hängt von den Anfangsbedingungen ab.

Wir untersuchen zunächst den normalen Fall 1) des Näheren.

In Fig. 93 haben wir diejenigen Kreise verzeichnet, welche der Schwerpunkt $S$ und der Punkt $O$ nach Voraussetzung bei der präcessionsähnlichen Bewegung annähernd beschreiben. Beide Kreise sind durch senkrechte Projektion in die den Kreisel tragende Horizontalebene verlegt. Die Rotation finde annähernd um die Figurenaxe *im* Sinne des Uhrzeigers statt. Die Projektion des im Schwerpunkte konstruierten Drehimpulses auf diese Axe sei dementsprechend $N > 0$. Dann findet auch die Präcession des Stützpunktes von oben gesehen *im* Uhrzeigersinne statt. Letzteres können wir aus unseren früheren Ergebnissen bei Vernachlässigung der Reibung entnehmen. Die Winkelgeschwindigkeit $\psi'$ der Knotenlinie, welche zugleich die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, mit der der Stützpunkt um die (bei unserer früheren Betrachtung feste) Vertikale durch den Schwerpunkt rotiert, hatte (s. z. B. Gl. (31) von pag. 526) im Mittel den Wert

$$\psi' = \frac{P}{N} = \frac{MgE}{N}, \tag{2}$$

ist also *positiv* bei positivem $N$. Sicherlich wird der *Sinn* der Präcessionsbewegung durch die Reibung nicht umgekehrt werden können. Hierdurch ist die der Bahn von $O$ in Fig. 93 beigegebene

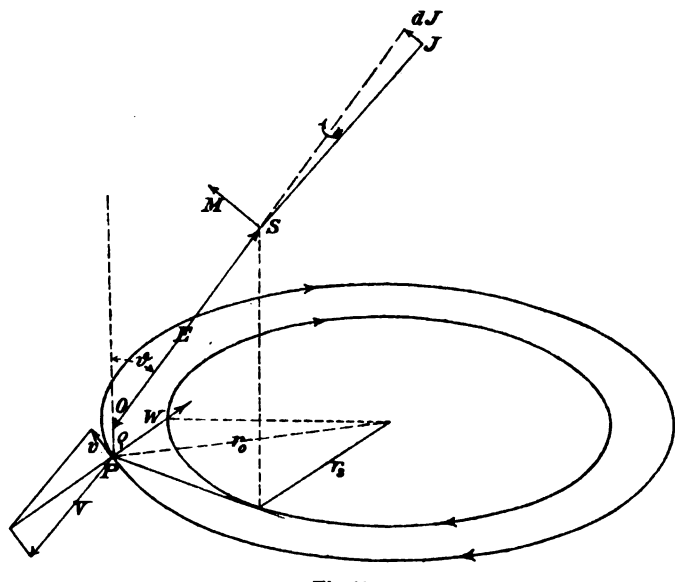



Fig. 93.

Pfeilrichtung gerechtfertigt. Dieselbe Pfeilrichtung kommt ersichtlich auch der Schwerpunktsbahn zu. Wir werden aber auch die *Gröfse* der in (2) genannten Präcessionsgeschwindigkeit auf den vorliegenden Fall übertragen dürfen, da die Reibung auf dieselbe nur einen indirekten Einflufs (durch Verkleinerung von $N$) hat.

Die oben eingeführten Geschwindigkeiten $v$ und $V$ sind jetzt nach Richtung und Gröfse leicht angebbar. $v$ hat die Richtung der an die Bahn von $O$ im Punkte $P$ gelegten Tangente und ist in unserer Figur von $P$ aus nach hinten gerichtet. $V$ liegt ungefähr senkrecht zur Figurenaxe und ist bei dem festgesetzten positiven Rotationssinn in unserer Figur nach vorne gerichtet. Der Gröfse nach ist, wenn $r_0$ den Radius der Bahn von $O$ bedeutet,

$$v = r_0 \psi' = r_0 \frac{MgE}{N}. \tag{3}$$

Ferner folgt aus dem Eigenimpuls $N$ die Gröfse der Rotation um die Figurenaxe gleich $N/C$ ($C$ = Trägheitsmoment um die Figurenaxe) und hieraus nach obigem angenähert:

$$V = \varrho \sin \vartheta \frac{N}{C}. \tag{4}$$

Wir setzen voraus, dafs nicht nur, entsprechend der Bedingung des Falles 1), $V$ gröfser als $v$, sondern dafs $V$ grofs gegen $v$ sei. Dies besagt nach (3) und (4)

$$(5) \qquad \frac{N^2}{MgEC} \text{ grofs gegen } \frac{r_0}{\varrho \sin \vartheta}.$$

Bei hinreichend grofsem Eigenimpuls und hinreichend schräger Figurenaxe wird diese Bedingung in der That erfüllt sein.

Zugleich mit $V$ steht unter der Annahme (5) auch der Reibungswiderstand $W$ annähernd senkrecht auf der Figurenaxe; dem Sinne nach ist er in unserer Figur nach hinten gerichtet. Mit der Gröfse und Richtung von $W$ hängt aber die Schwerpunktsbewegung auf's engste zusammen. Da nämlich $W$ die einzige horizontale Kraft ist, die auf den Kreisel wirkt, so ist die Horizontalbeschleunigung des Schwerpunkts zu $W$ parallel und gleich $W/M = \mu g$ (s. Gl. (1)). Beschreibt, wie wir annahmen, der Schwerpunkt nahezu einen Kreis mit annähernd konstanter Geschwindigkeit, so ist die Schwerpunktsbeschleunigung nahezu zentripetal, also senkrecht gegen die Kreisperipherie nach innen gerichtet. Da diese Richtung andrerseits genau parallel zur Richtung von $W$ und daher nahezu senkrecht zur Richtung der Figurenaxe steht, so folgt, *dafs die Projektion der Figurenaxe auf die tragende Horizontalebene den Schwerpunktskreis nahezu tangieren mufs.* Und zwar entspricht von den beiden Tangenten, die in Fig. 93 von der augenblicklichen Lage von $P$ an den Schwerpunktskreis gelegt werden können, offenbar die ausgezogene vordere Tangente den Verhältnissen des in Rede stehenden Falles 1). *Der Schwerpunkt bleibt also bei der Durchlaufung seines Kreises immer etwas hinter dem Stützpunkte zurück;* die Figurenaxe schneidet nicht die Vertikale durch den Mittelpunkt unserer Kreise, sondern dreht sich *in windschiefer Lage* um dieselbe herum. Auch die Gröfse des Schwerpunktskreises folgt nun leicht aus der Gröfse der Schwerpunktsbeschleunigung. Letztere ist einerseits bekanntlich gleich $r_s \psi'^2$, andrerseits wie oben bemerkt, gleich $\mu g$. Man hat also

$$(6) \qquad r_s = \frac{\mu g}{\psi'^2} = \mu g \frac{N^2}{(MgE)^2}.$$

Der Schwerpunktskreis ist um so gröfser, je gröfser der Eigenimpuls und je kleiner das Schweremoment $P = MgE$ ist; aufserdem nimmt seine Gröfse natürlich mit abnehmendem Reibungskoeffizienten $\mu$ ab und reduziert sich bei verschwindender Reibung auf Null, in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen. Auch die Gröfse des vom Stützpunkt beschriebenen konzentrischen Kreises ist hiernach bekannt. Man hat nämlich nach Fig. 93:

(7) $$r_0^2 = r_s^2 + (E \sin \vartheta)^2,$$

wo $E \sin \vartheta$ die Projektion der Länge $OS$ in die Horizontalebene bedeutet. Dieser Kreis wird im allgemeinen nur wenig gröfser sein wie der Schwerpunktskreis.

Nachdem die Schwerpunktsbewegung bestimmt ist, haben wir die Drehung um den Schwerpunkt zu besprechen. In welchem Sinne wird dieselbe durch die Reibung $W$ beeinflufst? Wir konstruieren uns zunächst das Reibungsmoment $\mathfrak{M}(W)$ mit Bezug auf den Schwerpunkt. Vernachlässigen wir den Abstand $\varrho$ der Punkte $O$ und $P$, so enthält die durch $S$ und $W$ gelegte Ebene annähernd die Figurenaxe. Der das Reibungsmoment darstellende Vektor, welcher als Lot auf dieser Ebene zu konstruieren ist, steht daher annähernd senkrecht auf der Figurenaxe und ist in der durch die Figurenaxe gelegten Vertikalebene unter den Verhältnissen unserer Figur 93 schräg nach *oben* gerichtet. Derselbe setzt sich nun mit dem vorhandenen Drehimpulse in der Weise zusammen, dafs sich der Impuls in jedem Zeitelemente $dt$ um $dJ = \mathfrak{M}\,dt$ ändert. Der Impuls, der annähernd die Richtung der Figurenaxe hat, wird dadurch nach oben hin abgelenkt. *Der Impuls richtet sich durch die Reibungswirkung allmählich auf.* Um von hieraus zu schliefsen, dafs auch die Figurenaxe sich aufrichtet, erinnern wir an die Schlufsweise von pag. 555, wonach die Rotationsaxe annähernd der Impulsaxe folgt, während die Figurenaxe in schnellem Zeitmafs um die Rotationsaxe herumgeführt wird, so dafs ihre mittlere Lage mit der Lage der Rotationsaxe annähernd übereinstimmt. Wir erkennen hieraus weiter, *dafs die Figurenaxe dauernd in der Nähe des Impulses bleibt, sich also ebenfalls aufrichtet.*

Natürlich ist neben dem Reibungsmomente $\mathfrak{M}(W)$ das Moment des Gegendruckes $\mathfrak{M}(R)$ zu berücksichtigen; dieses hat eine horizontale Axe und giebt in der vom reibungsfreien Falle her bekannten Weise indirekt zu der Präcession des Kreisels Anlafs.

In erster Annäherung bleibt die Gröfse des Impulses vermöge der Reibungswirkung ungeändert, da der Impuls-Endpunkt (vgl. Fig. 93) annähernd senkrecht gegen die Figurenaxe und daher auch annähernd senkrecht gegen die Impulsrichtung fortschreitet. Es ist aber klar, dafs auf die Dauer der Impuls dennoch geschwächt werden mufs. Denn einerseits wird bei der Hebung der Figurenaxe Arbeit gegen die Schwerkraft geleistet, andrerseits geht an der Unterlage dauernd Reibungsarbeit verloren. Diese Arbeitsverluste müssen aus der lebendigen Kraft des Kreisels gedeckt werden, also teils aus der lebendigen Kraft der Schwerpunktsbewegung, teils aus derjenigen der Drehbewegung.

Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist gleich $r_s \psi'$ und hat nach den Gl. (2) und (6) die Gröfse

$$\mu g \frac{N}{MgE}.$$

Soll dieselbe abnehmen, so mufs $N$ abnehmen. Zu dem gleichen Resultat werden wir offenbar geführt, wenn wir annehmen, dafs die Arbeitsverluste auf Kosten der lebendigen Kraft der Drehbewegung vor sich gehen. Denn der Hauptbestandteil dieser lebendigen Kraft ist wie bekannt $N^2/2C$. *Während also der Eigenimpuls $N$ in erster Näherung konstant bleibt, mufs er in zweiter Näherung langsam abnehmen.*

Die allmähliche Verminderung von $N$ bedingt aber weiter, dafs sich die Präcessionsgeschwindigkeit $\psi'$ nach Gl. (2) beschleunigt und ferner nach Gl. (6), dafs sich der Radius des Schwerpunktskreises verringert. Hieraus folgt nach Gl. (7), dafs auch der Radius des vom Stützpunkte beschriebenen Kreises $r_0$ abnehmen mufs, der übrigens in geringerem Grade auch durch das Aufrichten der Figurenaxe (Verkleinerung des Winkels $\vartheta$) verkleinert wird. Diese Ergebnisse stimmen, wie man sieht, mit den vorangestellten Resultaten der Beobachtung überein.

Wir fassen unsere Betrachtungen wie folgt zusammen: *Im Falle* 1) [$V > v$ oder besser $V$ grofs gegen $v$] *läuft der Schwerpunkt auf einem Kreise, dessen Radius sich allmählich verkleinert, also genauer gesagt, auf einer sich verengernden Spirale, und zwar mit abnehmender Geschwindigkeit. Das Gleiche gilt von dem Stützpunkte $P$ oder dem Halbkugelmittelpunkte $O$. Die Figurenaxe, die ursprünglich unter dem Winkel $\vartheta$ windschief an der vertikalen Mittellinie des Schwerpunktskreises vorbeigeht, richtet sich im Verlauf der Bewegung durch den Einflufs der Reibung immer mehr auf.*

Wir wollen in ähnlicher Weise den Fall 3) $v < V$ diskutieren. Hier ist die Geschwindigkeit $v$ für den Sinn des Gleitens mafsgebend; unter den Verhältnissen unserer Fig. 94, wo $v$ im Punkte $P$ nach hinten gerichtet ist, wird der Reibungswiderstand $W$ nach vorn gerichtet sein. Halten wir an unserer Annahme fest, dafs der Schwerpunkt sich nahezu gleichförmig auf einem Kreise bewegt, so mufs seine Zentripetalbeschleunigung wieder nach Richtung und Gröfse gleich $W/M$ sein. Die Zentripetalbeschleunigung mufs also in Fig. 94 ebenso wie $W$ nach vorn gerichtet sein, d. h. $S$ mufs sich auf dem hinteren Halbbogen des Schwerpunktskreises befinden. *Der Schwerpunkt eilt jetzt dem Stützpunkt im Sinne der Bewegung etwas voraus.* Die Figurenaxe geht abermals an der durch den Mittelpunkt des Schwerpunkts-

kreises gelegten Vertikalen windschief vorbei. Dagegen können wir nicht mehr wie im Falle 1) behaupten, dafs $W$ nahezu senkrecht zur Figurenaxe steht; es ist deshalb in Fig. 94 die in die Horizontalebene projizierte Figurenaxe nicht wie vorher als Tangente sondern als Sekante an den Schwerpunktskreis gelegt. Für die Gröfse des Schwerpunktskreises gilt wie vorher die Formel (6).

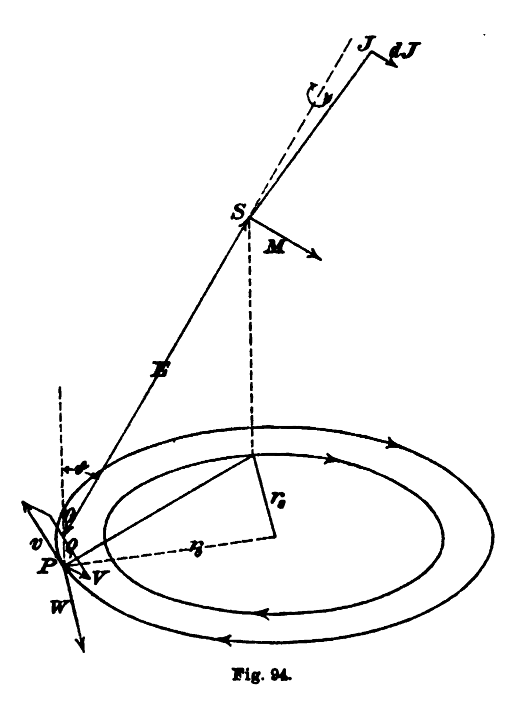



Fig. 94.

Es handelt sich ferner um den Einflufs der Reibung auf die Drehbewegung. Hier liegen die Verhältnisse dem Sinne nach umgekehrt wie im Falle 1). Da der Reibungswiderstand in unserer Figur nach vorne gerichtet ist, giebt er im Schwerpunkte ein Moment, dessen repräsentierender Vektor schräg nach unten verläuft. Der Impuls-Endpunkt wird also durch die Reibungswirkung jetzt nach unten abgelenkt. *Der Impulsvektor und* (bei Hinzunahme der Überlegung von pag. 555) *auch die Figurenaxe werden sich senken.*

Um auch hier die Arbeitsverhältnisse zu berücksichtigen, bemerken wir, dafs durch die Senkung der Figurenaxe Arbeit gewonnen, dafs dagegen durch den Reibungswiderstand dauernd Arbeit verbraucht wird. Wahrscheinlich wird die letztere Arbeitsgröfse überwiegen, sodafs im Ganzen die lebendige Kraft und insbesondere der Eigenimpuls weiter abnimmt. Wir sahen oben, dafs hieraus eine Verkleinerung des Schwerpunktskreises und weiterhin eine Verkleinerung der Bahn des Stützpunktes folgen würde. Andrerseits würde die zunehmende Neigung der Figurenaxe bei ungeändert bleibender Schwerpunktsbahn eine Vergröfserung der Bahn des Stützpunktes bedingen. Welcher von beiden Umständen mehr Einflufs auf die Gröfse der Bahn des Stützpunktes haben wird, läfst sich allgemein nicht entscheiden. Thatsächlich beobachtet man gegen Ende der Bewegung bei geschwächtem Eigenimpuls $N$ zuweilen eine Erweiterung, zuweilen eine Verengerung der Bahn des Stützpunktes.

Als hauptsächliches Ergebnis dieser allerdings sehr unsicheren Betrachtung ist zu betonen: *Die Figurenaxe mufs sich im Falle* 3) *senken.* Hierbei kann es nicht ausbleiben, dafs der Kreisel schliefslich mit seinen oberen Partien die Unterlage berührt und nach einigen unregelmäfsigen Auslaufsbewegungen zur Ruhe kommt.

Hinsichtlich des Grenzfalles 2) $v = V$ wollen wir uns kurz fassen. Dieser kann sich nur vorübergehend und, da wir die den Fall definierende Gleichung als Bedingung sowohl für die Gröfse wie für die Richtung der Geschwindigkeiten $v$ und $V$ auffassen wollten, nur unter besonderen Umständen einstellen. Da in diesem Grenzfalle der Stützpunkt an der Unterlage überhaupt nicht gleitet, so ist die eventuell vorhandene Reibung als eine Reibung der Ruhe (vgl. § 2) zu bezeichnen. Man hat alsdann nach Coulomb $W \leqq \mu_0 Mg$, wo $\mu_0$ den Reibungskoeffizienten der Ruhe bedeutet. Insbesondere ist es möglich, dafs die ruhende Reibung gleich Null wird, wenn nämlich der Schwerpunkt, dessen Beschleunigung auch jetzt nach Richtung und Gröfse, gleich $W/M$ sein mufs, in Ruhe ist, wenn also der Schwerpunktskreis sich auf einen Punkt zusammengezogen hat. In diesem Falle ist es denkbar, dafs der Kreisel seine Präcession ausführt, genau so wie auf einer idealen glatten Ebene, die wir im Anhange zu Kapitel VI voraussetzten, dafs also die Figurenaxe weder steigt noch fällt. Eine solche Bewegung könnte sogar beliebig lange andauern, wenn nicht andere hierbei aufser Betracht gelassene Einflüsse (rollende Reibung, Luftwiderstand) die Bedingungen des Falles 2) stören und den Übergang zu dem Fall 3) bedingen würden.

Die Unterscheidung der vorangestellten drei Fälle $V > v$, $V = v$, $V < v$ haben wir einer Note von Archibald Smith*) entnommen, in welcher überdies namentlich der Einflufs der besonderen Form des Auflagerendes diskutiert wird. Um unsere früheren Reibungsbetrachtungen in diese Fallunterscheidung einzuordnen, bemerken wir, dafs beim Kreisel mit festgehaltenem Punkte $O$ natürlich $v = 0$ ist. Hier befinden wir uns also notwendig unter der Bedingung des Falles 1). Dementsprechend fanden wir früher, dafs vermöge der gleitenden Reibung die Figurenaxe des Kreisels mit festem Punkte sich allemal aufrichten müsse. Eine Behandlung des vorliegenden Reibungsproblems findet sich, soweit es die Drehung des Kreisels um seinen Schwerpunkt angeht, auch in dem bekannten Buche von Jellett**), jedoch mit dem Unterschiede, dafs

*) Note on the theory of the spinning top. Cambridge Mathematical Journal Vol. 1 (1846) pag. 47.

**) Theorie der Reibung, deutsch von Lüroth und Schepp. Leipzig 1890, Kapitel 8, pag. 198.

hier die Richtung des Gleitens allein nach der Geschwindigkeit $V$ beurteilt und das Vorhandensein der Geschwindigkeit $v$ übersehen wird. Indem also Jellet gewissermaſsen die Geschwindigkeit $v$ gleich Null setzt, befindet er sich gleichfalls unter der Bedingung des Falles 1) und zeigt dementsprechend durch Rechnungen, die unserer obigen qualitativen Überlegung als Stütze dienen können, daſs die Figurenaxe sich aufrichten müsse. Nimmt man andrerseits an, daſs der Kreisel nach unten hin in eine absolut scharfe konische Spitze ausläuft, so wird der Stützpunkt ein Punkt der Figurenaxe, nämlich eben diese Spitze sein; alsdann ist bei reiner Rotation um die Figurenaxe $V = 0$ und wir befinden uns stets im Falle 3). Infolgedessen würde bei absolut zugeschärfter Auflagestelle die Figurenaxe unter allen Umständen durch die Reibung gesenkt werden.

Die hier gegebene Behandlung ist sowohl nach theoretischer wie nach experimenteller Seite hin reichlich unvollständig. So haben wir es nach theoretischer Seite überhaupt vermieden, die mit Reibungsgliedern behafteten Differentialgleichungen der Bewegung aufzuschreiben, weil wir uns bei der Unsicherheit der physikalischen Grundlagen keinen der Mühe entsprechenden Nutzen für das Verständnis des wirklich Beobachteten aus eingehenderen analytischen Entwickelungen versprachen. Nach experimenteller Seite haben wir uns mit der Aufzeichnung der Bahnkurve begnügt, welche der Unterstützungspunkt auf der Unterlage beschreibt, dagegen haben wir genauere Messungen über die zu jeder Bahnkurve gehörige Impulsgröſse, über die Abhängigkeit der Bewegung von den Anfangsbedingungen, von der Form der Auflagefläche etc. unterlassen müssen. Das letztere Versäumnis scheint uns im vorliegenden Falle schwerer zu wiegen, wie das erstere; wie wir denn allgemein wiederholentlich betonen möchten, daſs das Verständnis der wirklichen Bewegungsvorgänge, sofern dabei Reibungseinflüsse vorherrschend sind, mindestens ebenso sehr durch Beobachtung wie durch Rechnung zu fördern ist.

---

## Kapitel VIII.

## Anwendungen der Kreiseltheorie.

### Abschnitt A. Astronomische Anwendungen.

#### § 1. Die Präcession der Erdaxe, im Anschlufs an eine Idee von Gaufs behandelt.

Entsprechend der dominierenden Stellung, welche die astronomischen Anwendungen in der älteren mathematischen Litteratur einnehmen, ist das Problem der Rotationserscheinungen des Erdkörpers von hervorragendem Einflufs auf die Entwickelung der Kreiseltheorie überhaupt gewesen, wie sich unter Anderem in der auch von uns übernommenen Nomenclatur: reguläre Präcession, Nutation, Knotenlinie erweist. Fast die sämtlichen Namen der mathematischen Klassiker, allen voran Newton, dann Euler, d'Alembert, Laplace, Lagrange, Poisson, finden wir mit der Geschichte dieses Problems verknüpft.

Die Theorie der astronomischen Präcession ist sehr einfach, wenn man sich auf eine erste Annäherung beschränkt, sehr kompliziert, wenn man eine erschöpfende Behandlung anstrebt. Der letztere Standpunkt wird in den Lehrbüchern der Astronomie*) eingenommen, auf den ersteren müssen wir uns im wesentlichen stellen. Lediglich um dem nicht-astronomischen Leser einen Einblick in die mühsamen und bewundernswert gründlichen Methoden der Astronomie zu verschaffen, wollen wir zum Schlufs dieses Abschnittes einige Resultate der genaueren Theorie hersetzen.

Die Schwierigkeit wächst ganz aufserordentlich, wenn wir den Boden der abstrakten Dynamik verlassen und den Erdkörper nicht mehr als absolut starr ansehen. Die Diskussionen, die dann auftreten, sind heute noch keineswegs abgeschlossen. Wir werden diese Dinge für den folgenden Abschnitt aufsparen und zunächst an der *Annahme der Starrheit* festhalten.

---

*) Wir beziehen uns im Folgenden auf Tisserand, Mécanique céleste, t. II, Chap. 22—27. In § 194, pag. 442 berichtet Tisserand über die Geschichte des Problems und den Anteil der oben genannten Klassiker an seiner Erforschung.

Die Methode, der wir uns bedienen werden, ist einem von Gaufs angegebenen Verfahren zur Berechnung der säkularen Störungen der Planetenbahnen nachgebildet. Sie hat den Vorzug grofser Anschaulichkeit und liefert die einzelnen Bestandteile der Lösung schrittweise nach der Reihenfolge ihrer Wichtigkeit. Auf das vorliegende Problem scheint sie bisher nicht angewandt zu sein. Gaufs selbst leitet seine Methode durch die Bemerkung ein, dafs „die Säkularveränderungen einer Planetenbahn durch die Störung eines anderen Planeten dieselben sind, der störende Planet mag seine elliptische Bahn nach Keplers Gesetzen wirklich beschreiben, oder seine Masse mag auf den Umfang der Ellipse in dem Mafse verteilt angenommen werden, dafs auf Stücke der Ellipse, die sonst in gleich grofsen Zeiten beschrieben werden, gleich grofse Anteile an der ganzen Masse kommen“.

Diesen Gedanken wollen wir uns zu eigen machen und erweitern: Wir wollen nicht nur die Masse des störenden, sondern später (§ 2) auch die des gestörten Körpers, wo dieses wünschenswert ist, längs seiner Bahn verteilen, die wir dann als starren Ring behandeln, und werden nicht nur die säkularen, sondern auch, bei Zugrundelegung einer anderen Massenverteilung, die periodischen Störungen (§ 3) zu finden lernen.

So wie Gaufs seine Methode auseinandergesetzt hat, dient sie zur *genauen* Bestimmung der säkularen Störungen (wenigstens derjenigen erster Ordnung). Indem wir auf die von Gaufs beabsichtigte Genauigkeit verzichten, werden wir sie dadurch vereinfachen, dafs wir zunächst von der Excentricität der Bahn, d. h. hier der Sonnen- und Mondbahn absehen, diese also als kreisförmig voraussetzen. Damit fällt aber zugleich die in dem Gaufsischen Citat vorgesehene Ungleichförmigkeit der Massenverteilung fort, welche ja der ungleichförmigen Bewegung auf der Ellipse entsprechen sollte, und macht einer gleichförmigen Verteilung auf der Kreisperipherie Platz.

Der wichtigste Teil der Rotationserscheinungen der Erde ist die *Präcessionsbewegung*. Die kinematischen Verhältnisse derselben sind uns im Groben schon von früher her (pag. 50) bekannt: Die Erdaxe bildet mit der Normalen zur Ekliptik einen Winkel von $23\frac{1}{2}{}^0$ (genauer zur Zeit $23^0\,27'\,7''$, welche Zahl aber selbst langsam veränderlich ist) und dreht sich unter diesem Winkel um die besagte Normale in ca. 26000 Jahren einmal herum. Zusammen mit der täglichen Umdrehung der Erde stellt diese Axenbewegung eine reguläre Präcession

*) Determinatio attractionis etc., Ges. W. Bd. 3, pag. 331 und 357. Es ist dies dieselbe Abhandlung, welche die einzige direkte Mitteilung von Gaufs über seine Theorie der elliptischen Integrale enthält.

im früheren Sinne dar u. zw. eine retrograde: Betrachten wir nämlich den Vorgang von derjenigen Seite der Ekliptik aus, nach welcher der Nordpol der Erde hinweist, so findet die Drehung der Erde um ihre Figurenaxe entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, die Drehung der Erdaxe um die Normale der Ekliptik im Sinne des Uhrzeigers statt (s. die nebenstehende Figur; die drei Pfeile, welche bez. der Figurenaxe der Erde $F$, der Normalen $N$ und der Ebene $E$ der Ekliptik beigegeben sind, deuten die Richtung der Erdrotation, der Präcession der Erdaxe und der scheinbaren Sonnenbewegung an); der schmale Polhodiekegel, dessen Gröfse pag. 50 ermittelt wurde, rollt im Innern des Herpolhodiekegels ab (vgl. Fig. 8 von pag. 52 sowie Fig. 100a).

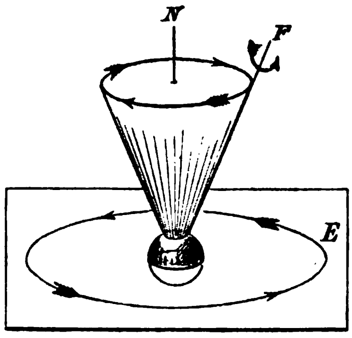


Fig. 95.

Diese Verhältnisse ebenso wie die Zahl 26000 sind der Beobachtung natürlich nicht direkt zugänglich. Letztere bezieht sich vielmehr auf die Schnittpunkte der Ekliptik mit der Äquatorebene, welche bekanntlich *Frühlings- und Herbst-Äquinoktialpunkte* (*Tag- und Nachtgleichen-Punkte*) heifsen und deren Verbindungsgerade die Knotenlinie $K$ ist. Aus der Präcessionsbewegung der Erdaxe folgt nun, dafs sich auch diese Punkte im Sinne des Uhrzeigers, d. h. entgegen dem Sinne der scheinbaren Sonnenbewegung um die Normale der Ekliptik herumbewegen und zwar, wie die Beobachtung zeigt, in jedem Jahre um den Betrag von ca. 50″. Hieraus berechnet sich rückwärts die angegebene ungefähre Periode von 26000 Jahren. Es ist nämlich die Zeit eines vollen Umganges der Äquinoktialpunkte, also auch die Zeit, in der die Erdaxe die Normale der Ekliptik einmal umkreist, gleich

$$\frac{360^\circ}{50''} = \text{ca. } 26\,000 \text{ Jahren.}$$

Wir fragen nun, wie weit diese Erscheinung durch die bisherige Theorie des schweren symmetrischen Kreisels erklärt werden kann. Dafs es sich um nichts anderes, als eine Wirkung der allgemeinen Gravitation auf die am Äquator wulstförmig aufgetriebene, rotierende Erdmasse handelt, hat schon Newton*) erkannt und damit einen der wichtigsten und bewundernswertesten Belege seiner Theorie geschaffen.

Da die ins Spiel kommenden Anziehungskräfte nur von der gegenseitigen Lage der Himmelskörper abhängen, dürfen wir uns den Schwer-

*) Philosophiae naturalis principia mathematica. 1687. Tom. III, Prop. XXI, Theor. XVII.

punkt der Erde als fest und die übrigen Himmelskörper relativ gegen die Erde bewegt denken. Von diesen werden wir nur diejenigen Körper zu berücksichtigen brauchen, welche entweder durch ihre überwiegende Gröſse oder durch ihre geringe Entfernung von der Erde ausgezeichnet sind, d. h. nur die Sonne und den Mond. Zur vollständigen Behandlung der Rotationserscheinungen der Erde wäre es erforderlich, die wechselnde Gröſse der Anziehungskraft infolge der wechselnden Entfernung beider Körper von der Erde und die wechselnde Richtung der Kraft infolge des Fortschreitens der Körper auf ihren Bahnen zu berücksichtigen. In dieser Allgemeinheit werden wir auf das Problem im dritten Paragraphen zurückkommen. Wir werden uns dort das zeitlich veränderliche Potential der Sonnen- und Mondanziehung $V(t)$ in eine trigonometrische Reihe nach der Zeit $t$ entwickelt denken und die den einzelnen Perioden des Sonnenumlaufs, des Umlaufs der Mondknoten etc. entsprechenden periodischen Glieder für sich betrachten. Das konstante Glied jener Reihe liefert im Besonderen die *säkulare Einwirkung* von Sonne und Mond auf die Erde, welches als Folgeerscheinung die uns zunächst interessierende Präcessionsbewegung der Erdaxe ergiebt. Indem wir an dieser Stelle auf jene allgemeinere Betrachtung nur hinweisen, wollen wir uns nun des anschaulichen Gauſsischen Verfahrens bedienen, welches gerade den in Frage kommenden säkularen Teil aus der gesamten Anziehungswirkung aussondert.

Wir denken uns also die Masse von Sonne und Mond auf ihren relativen Bahnen gegen die Erde ausgebreitet, und zwar gleichförmig ausgebreitet, da wir diese Bahnen als Kreise voraussetzen wollten. Der Radius der Kreise entspricht dem mittleren Erdabstand von Sonne und Mond. Wir haben auf diese Weise statt der wirklichen Sonnen- und Mondanziehung die Anziehung eines unendlich dünnen „Sonnen- und Mondringes" von gleichförmiger Dichte zu untersuchen. Ferner wollen wir fürs Erste von der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, welche bekanntlich ungefähr $5^0$ beträgt, absehen und uns den Mondring in die Ebene des Sonnenringes hineingedreht denken (s. Fig. 96, wo den fraglichen Ringen die in der Astronomie üblichen Zeichen für Sonne ⊙, Mond ☾ und Erde ♁ beigegeben sind). Auch über die Beschaffenheit der Erde wollen wir vereinfachende Annahmen machen. Wie verabredet setzen wir sie als starr und auſserdem als Rotationskörper um die Nord-Südpol-Axe von den Trägheitsmomenten $C$ und $A$ voraus, wobei wegen der Aufbauchung am Äquator $C > A$ ist. Für die Berechnung sämtlicher Trägheitswirkungen kommt es nun auf die besondere Form der Erde in keiner Weise an; jeder andere Körper von denselben Trägheitsmomenten $C, A, A$ an die

Stelle der Erde gesetzt, würde sich hinsichtlich aller Trägheitswirkungen bei der Rotation genau so verhalten wie die Erde. Aber mehr als das: Wir behaupten, dafs es auch bei der Berechnung der Anziehungs-

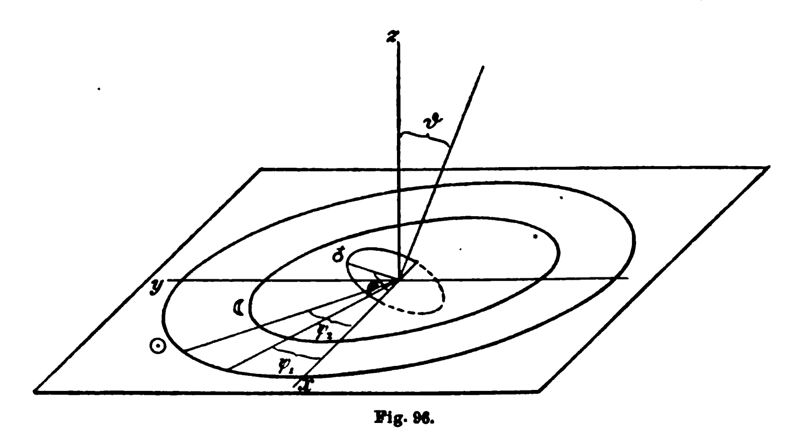


Fig. 96.

wirkungen von Sonne und Mond lediglich auf die Gröfse der Trägheitsmomente ankommt, sofern wir uns mit einer gewissen Näherung begnügen.

Zum Beweise denken wir uns das Anziehungspotential der wirklichen Erde auf einen äufseren, hinreichend entfernten Punkt $P$, z. B. einen Punkt des Sonnen- oder Mondringes hingeschrieben. Dasselbe hat die Form $\sum \frac{m}{r}$, wo $m$ ein Massenelement der Erde ist und die Summation sich auf die ganze Erdmasse erstreckt. Hier wird man $1/r$ nach Potenzen der Verhältnisse $X/r_0$, $Y/r_0$, $Z/r_0$ entwickeln, wobei unter $XYZ$ die Koordinaten des Massenelementes $m$ verstanden werden, als Koordinaten-Anfangspunkt der Mittelpunkt (Schwerpunkt) der Erde gedacht wird und $r_0$ den Abstand des Punktes $P$ vom Erdmittelpunkte bedeutet. Diese Reihe konvergiert sehr schnell, weil die genannten Verhältnisse in unserem Falle höchstens gleich dem Verhältnis Erdradius durch Radius der Mondbahn sind. Man wird daher, wenn man keine grofse Genauigkeit anstrebt, die Reihe mit den Gliedern niedrigster Ordnung abbrechen dürfen. Die Glieder erster Ordnung verschwinden bei der Summation über die Erde, falls man als Koordinatenanfang den Schwerpunkt gewählt hat. Die Glieder zweiter Ordnung weisen nach Ausführung der Summation als Koeffizienten die Gröfsen $\Sigma m X^2$, $\Sigma m X Y, \ldots$, d. h. die Trägheitsmomente und Trägheitsprodukte (oder Centrifugalmomente) der Erde auf. Läfst man insbesondere die Koordinatenaxen mit den Hauptträgheitsaxen zusammenfallen, so reduziert sich die Zahl der quadratischen Glieder auf drei und ihre Koeffi-

zienten werden die drei Hauptträgheitsmomente. Daraus folgt aber, dafs in erster Annäherung, d. h. bei Berücksichtigung lediglich der Glieder niedrigster Ordnung, alle Körper von gleicher Lage der Hauptaxen und gleicher Gröfse der Hauptträgheitsmomente sich auch hinsichtlich der Gravitationswirkungen gleich verhalten müssen. Wir können also auch in dieser Hinsicht für die Erde einen beliebigen anderen Körper substituieren, falls nur das Trägheitsellipsoid desselben mit dem der Erde identisch ist.

Für viele Zwecke ist es üblich und nützlich, sich die Erde durch ein ideales Rotationsellipsoid ersetzt zu denken. In unserem Falle ist aber eine andere Wahl vorzuziehen: wir denken uns eine vollkommene, homogene Kugel, welche am Äquator mit einem gleichförmig mit Masse belegten Gürtel versehen ist. Es sei $a$ das Trägheitsmoment der Kugel für einen ihrer Durchmesser und $m$ die auf unserem Gürtel, dem „Erdringe", ausgebreitete Masse. Wir haben es nun so einzurichten, dafs diese Kombination, Kugel und Ring, dieselben Hauptträgheitsmomente $C$ und $A$ besitze, wie die wirkliche Erde, um in ihr einen für unsere Zwecke vollkommenen Ersatz der wirklichen Erde zu haben. Es ist aber das Trägheitsmoment des Ringes um die Nord-Süd-Axe gleich $mR^2$, das um eine äquatoriale Axe gleich $1/2\, mR^2$, unter $R$ den Erdradius verstanden. Mithin haben wir zu bewirken, dafs

$$mR^2 + a = C,$$
$$\frac{1}{2} mR^2 + a = A$$

wird; wir haben also zu wählen:

$$m = \frac{2(C-A)}{R^2}, \quad a = 2A - C. \tag{1}$$

Weiter ist aus Symmetrierücksichten klar, dafs die Kugel vom Trägheitsmomente $a$ bei der Berechnung des Drehmomentes der anziehenden Wirkung von Sonnen- und Mondring nicht in Frage kommt, dafs wir vielmehr nur den Erdring zu berücksichtigen haben. Ferner lehrt die mechanische Anschauung ohne Weiteres, dafs Sonnen- und Mondring in gleicher Weise bestrebt sein werden, den Erdring in die Ebene der Ekliptik hineinzudrehen. Die betr. Drehkraft hat die Knotenlinie zur Axe und wirkt, von derjenigen Seite der Knotenlinie gesehen, welche den Frühlings-Tag- und Nachtgleichen-Punkt trägt, um diese Axe entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, gerade so wie die Schwerkraft bei einem symmetrischen Kreisel, dessen Schwerpunkt unter dem Stützpunkte liegt. Wir wünschen die Gröfse dieser Drehkraft zu berechnen.

Sei $m_1$ die Masse, $r_1$ der Radius des Sonnenringes und $\psi_1$ ein in der Ekliptik etwa von der Knotenlinie aus gezählter Winkel, welcher die einzelnen Punkte des Sonnenringes unterscheidet (s. Fig. 96). Die analoge Bedeutung mögen $m_2$, $r_2$, $\psi_2$ für den Mondring haben. Endlich sind dieselben Gröſsen für den um den Erdäquator herumgelegten Erdring: $m$ (s. oben), $R$ (Erdradius) und $\varphi$ (ein in der Äquatorebene von der Knotenlinie aus gezählter Winkel).

Der Winkel zwischen Erdring und Ekliptik heiſse $\vartheta$ ($= 23\frac{1}{2}^0$ ca.). Wir legen rechtwinklige Koordinaten $x$, $y$, $z$ zu Grunde, indem wir die $z$-Richtung mit der Normalen der Ekliptik, die $x$-Richtung mit der Knotenlinie zusammenfallen lassen; dann wird für den Sonnen- und Mondring:

$$x_1 = r_1 \cos \psi_1, \quad y_1 = r_1 \sin \psi_1, \quad z_1 = 0,$$
$$x_2 = r_2 \cos \psi_2, \quad y_2 = r_2 \sin \psi_2, \quad z_2 = 0,$$

während wir für den Erdring haben:

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi \cos \vartheta, \quad z = R \sin \varphi \sin \vartheta.$$

Um das Anziehungspotential des Sonnenringes auf den Erdring zu bilden, berechnen wir

$$\frac{1}{r} = \{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\}^{-\frac{1}{2}} = \{r_1^2 + R^2 - 2Rr_1 s\}^{-\frac{1}{2}},$$
$$s = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{Rr_1} = \cos \psi_1 \cos \varphi + \sin \psi_1 \sin \varphi \cos \vartheta,$$

und entwickeln $\frac{1}{r}$ nach Potenzen der kleinen Gröſse $\frac{R}{r_1}$, indem wir nur die Glieder bis zur zweiten Potenz incl. hinschreiben:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\left(1 + \frac{Rs}{r_1} + \frac{3}{2}\left(\frac{Rs}{r_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_1}\right)^2 + \cdots\right).$$

Dieser Ausdruck ist nach $\psi_1$ und $\varphi$, d. h. über den Sonnen- und Erdring zu integrieren. Dabei wird

$$\int_0^{2\pi} s\, d\psi_1 = 0, \quad \int_0^{2\pi} s^2\, d\psi_1 = \pi(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta),$$
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} s^2\, d\psi_1 = \pi^2(1 + \cos^2 \vartheta).$$

Das gesuchte Potential lautet daher, unter $f$ die Gravitationskonstante verstanden:

$$V_1 = f \int\int \frac{dm_1\, dm}{r} = f \frac{m_1 m}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\psi_1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, d\varphi$$
$$= f \frac{m_1 m}{r_1}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{R^2}{r_1^2}(1 + \cos^2 \vartheta) - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r_1^2} + \cdots\right).$$

Dasselbe hängt, wie wir sehen, nur von dem Winkel $\vartheta$ ab; also wirkt die Anziehung nur auf eine Änderung des Winkels $\vartheta$, d. h. auf eine Drehung um die Knotenlinie hin, wie wir schon oben erkannten. Die Gröfse dieser Drehkraft ist dabei in erster Annäherung, d. h. bei der schon vorher genannten Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{R}{r_1}$:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{4} f \frac{m_1 m R^2}{r_1^3} \sin\vartheta \cos\vartheta \ldots \tag{2}$$

Endlich drücken wir die Masse $m$ des Erdringes durch die Trägheitsmomente $C$ und $A$ des Erdkörpers aus (s. Gl. (1)) und erhalten:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{2} f \frac{m_1 (C-A)}{r_1^3} \sin\vartheta \cos\vartheta. \tag{2'}$$

Ebenso ergiebt sich das vom Mondringe herrührende Drehmoment zu

$$\frac{\partial V_2}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{2} f \frac{m_2 (C-A)}{r_2^3} \sin\vartheta \cos\vartheta. \tag{2''}$$

Die genannte Drehkraft ist daher gleich der Summe dieser beiden Ausdrücke, d. h. gleich

$$P \cos\vartheta \sin\vartheta,$$

wenn zur Abkürzung

$$P = -\frac{3}{2} f (C-A) \left\{ \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right\} \tag{3}$$

gesetzt wird. Wir haben somit im vorliegenden Falle für die äufsere Drehkraft einen ganz ähnlichen Wert ($P \sin\vartheta \cos\vartheta$, $P < 0$) gefunden, wie früher beim schweren symmetrischen Kreisel, dessen Schwerpunkt unterhalb des Stützpunktes lag ($P \sin\vartheta$, $P < 0$).

Wir machen uns nun klar, *dafs unter dem Einflufs dieser Drehkraft die reguläre Präcession ähnlich wie früher eine mögliche Bewegungsform darstellt.* Gleichzeitig merken wir an, dafs sie ebensowenig wie früher, die allgemeinste mögliche Bewegungsform giebt. (Die Frage, ob es sich bei der Erde um die besondere *reguläre* Präcession oder um die allgemeine *pseudoreguläre* Präcession handelt, bildet den eigentlichen Gegenstand des folgenden geophysikalischen Abschnittes. Indem wir den Leser auf diesen verweisen, werden wir im gegenwärtigen Abschnitt die Bewegung der Erde und ebenso die des Mondringes als reguläre Präcession behandeln.) Dabei stützen wir uns am einfachsten auf das d'Alembertsche Prinzip (Kap. III, § 4), nach welchem bei jeder möglichen oder „natürlichen" Bewegung des Kreisels die Trägheitswirkung der äufseren Drehkraft dauernd das Gleichgewicht hält. Die Trägheitswirkung des symmetrischen Kreisels bei der regulären Präcession wurde pag. 175 zu

$$K = -C\mu\nu \sin\vartheta - (C-A)\nu^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \tag{4}$$

gefunden; dieses Moment hatte die Knotenlinie zur Axe, ebenso wie im vorliegenden Falle die äufsere Drehkraft $P \sin\vartheta \cos\vartheta$. Das besagte Prinzip verlangt also:

$$K + P \sin\vartheta \cos\vartheta = 0. \tag{5}$$

In Gleichung (4) bedeutet $\nu$ die Präcessionsgeschwindigkeit, d. h. die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Erdaxe um die Normale der Ekliptik dreht; $\mu$ ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde bei ihrer täglichen Umdrehung, gemessen von der Knotenlinie aus. Als Unbekannte haben wir die Gröfse $\nu$ anzusehen. Unsere Gleichung liefert für dieselbe zwei Werte (wie früher bei der Präcessionsbewegung des symmetrischen Kreisels, pag. 178); da $P$ (s. u.) sehr klein ist, wird der eine dieser Werte ebenfalls sehr klein, der andere von der Gröfsenordnung von $\mu$. In unserem Falle kommt nur der erstere Wert für die Präcessionsgeschwindigkeit in Betracht, da die Beobachtungen unzweideutig zeigen, dafs $\nu$ erheblich kleiner als $\mu$ ist. Gleichzeitig berechtigt uns eben diese Kleinheit des Verhältnisses $\nu : \mu$ in Gleichung (4) das zweite Glied gegen das erste zu vernachlässigen und Gleichung (5) einfacher folgendermafsen zu schreiben:

$$C\mu\nu = P \cos\vartheta. \tag{5'}$$

Hieraus ergiebt sich als theoretischer Wert für $\nu$:

$$\nu = \frac{P\cos\vartheta}{C\mu} = -\frac{3}{2}\,\frac{f}{\mu}\,\frac{C-A}{C}\left\{\frac{m_1}{r_1^{\,3}} + \frac{m_2}{r_2^{\,3}}\right\}\cos\vartheta. \tag{6}$$

Die rechte Seite läfst sich für die numerische Rechnung bequemer gestalten, wenn wir sie mit Hülfe des dritten Keplerschen Gesetzes umformen. Der präciseste Ausdruck desselben ist bekanntlich die Gleichung

$$f\,\frac{(m+m')}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2;$$

hier bedeuten $m$ und $m'$ die beiden Massen des Zweikörperproblems, $a$ die halbe grofse Axe der Keplerschen Ellipse, $T$ die Umlaufszeit. Wenn wir von der Excentrizität absehen, wird $a$ mit dem mittleren Abstande $r$ identisch. Für die Bewegung der Erde um die Sonne ergiebt sich hieraus, da die Masse der Erde gegen die der Sonne ohne Weiteres vernachlässigt werden darf:

$$f\,\frac{m_1}{r_1^{\,3}} = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \tag{7}$$

und für die Bewegung des Mondes um die Erde

$$f\,\frac{M+m_2}{r_2^{\,3}} = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \quad \text{oder} \quad f\,\frac{m_2}{r_2^{\,3}} = \frac{m_2}{M+m_2}\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2. \tag{7'}$$

Gleichung (6) schreibt sich daraufhin folgendermafsen:

$$\nu = -6\pi^2\,\frac{C-A}{\mu C}\left(\frac{1}{T_1^{\,2}} + \frac{m_2}{M+m_2}\,\frac{1}{T_2^{\,2}}\right)\cos\vartheta. \tag{6'}$$

Aus dieser Formel wollen wir nun einige numerische Schlüsse ziehen. Zunächst läßt sich der von der Sonne herrührende Bestandteil der Präcession ($\nu_1$) mit dem von dem Monde herrührenden ($\nu_2$) vergleichen. Wir haben nämlich ersichtlich

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \left(\frac{M}{m_2} + 1\right) \frac{T_2^2}{T_1^2}.$$

Hier ist $T_2 : T_1$ das Verhältnis des (siderischen) Mondumlaufs zum (siderischen) Jahre, d. h. ungefähr gleich $27\,{}^1/_3 : 365\,{}^1/_4$. Für das Verhältnis der Erdmasse zur Mondmasse werden wir den Wert 82 zu Grunde legen. Infolge dessen ergiebt sich

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = 0{,}47 \quad \text{oder} \quad \frac{\nu_2}{\nu_1} = 2{,}13.$$

*Der Beitrag des Mondes zur Präcessionserscheinung ist also wegen seiner geringen Entfernung trotz seiner geringen Masse mehr als doppelt so groß, wie der der Sonne.*

Berechnen wir nun die beiden Bestandteile einzeln. Wir haben

$$(8) \qquad \nu_1 = -6\pi^2 \frac{C-A}{C} \frac{\cos\vartheta}{\mu T_1^2}, \quad \nu_2 = 2{,}13 \cdot \nu_1.$$

Es ist aber $\mu$, die Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung, gleich $-2\pi$ dividiert durch die Länge des Sterntages*), also $\mu T_1$ gleich $-2\pi$ multipliziert mit der Anzahl der Sterntage, die auf ein Jahr kommen. Diese Anzahl ist bekanntlich um 1 größer wie die Anzahl der Sonnentage. Somit wird $\mu T_1 = -2\pi \cdot 366\,{}^1/_4$. (Das negative Zeichen rührt daher, daß die Drehung der Erde entgegen dem Sinne des Uhrzeigers stattfindet.) Wir müssen ferner den Wert von $\frac{C-A}{C}$ kennen. Indem wir uns eines gewissen Zirkels schuldig machen (s. § 4), wollen wir dafür den Wert $\frac{1}{305}$ acceptieren. Nehmen wir als Zeiteinheit das Jahr an, so ergiebt sich schließlich, in Bogensekunden ausgedrückt:

$$(9) \qquad \nu_1 = 3\pi \cdot \frac{\cos 23{,}5^0}{305 \cdot 366\,{}^1/_4} = 16''.$$

*) Diese Angabe ist nicht ganz genau. Da nämlich die Winkelgeschwindigkeit $\mu$ ebenso wie der Eulersche Winkel $\varphi$, dessen zeitlicher Differentialquotient sie ist, von der Knotenlinie aus zu messen ist und diese sich, eben wegen der Präcession, entgegen dem Sinne der Erdrotation verschiebt, so wird $\mu$ in Wirklichkeit etwas größer ausfallen. Die obige Angabe bezieht sich eigentlich auf die wahre Umdrehungsgeschwindigkeit $r$, die dritte Komponente des Drehungsvektors $(p, q, r)$. Da aber $r = \varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi'$, da ferner $\varphi' = \mu$, $\psi' = \nu$ ist, so wird die Differenz zwischen $r$ und $\mu$ gleich $\nu \cos\vartheta$, welche Größe wegen der Kleinheit von $\nu$ für unsere Zwecke nicht in Betracht kommt.

*Die Knotenlinie dreht sich also wegen der Sonnenanziehung allein im Laufe eines Jahres um 16″ vorwärts.*

Ferner ergiebt sich nach Gl. (8)

$$\nu_2 = 2{,}13 \cdot 16'' = 34''. \tag{9'}$$

*Wegen der Mondanziehung allein dreht sich also die Knotenlinie während eines Jahres um 34″. Der Gesamtbetrag der Präcession ist mithin*

$$\nu_1 + \nu_2 = 50''. \tag{10}$$

Soviel über die Erklärung und die ungefähre Gröſsenbestimmung der Präcession. Zum Vergleich mit Späterem wollen wir noch die Bewegung der Erdaxe durch Angabe der Eulerschen Winkel $\psi$ und $\vartheta$ beschreiben. Dem bisherigen Grade der Annäherung entspricht die folgende Darstellung:

$$\begin{cases} \psi = \psi_0 + 50'' \cdot t, \\ \vartheta = 23^0\,27'\,7''; \end{cases} \tag{11}$$

die Gröſse $\psi_0$ bleibt hierin unbestimmt; sie hängt davon ab, von welchem Punkte der Ekliptik wir den Winkel $\psi$ messen wollen.

## § 2. Der Rückgang der Mondknoten. Erste Erweiterung der Gauſsischen Methode.

Die Mondbahn fällt bekanntlich nicht genau mit der Ebene der Ekliptik zusammen, wie wir bisher annahmen, sondern bildet mit ihr einen Winkel von ca. $5^0$ (genauer gesagt einen Winkel, der zwischen $5^0\,0'$ und $5^0\,18'$ schwankt). Ihre Schnittpunkte mit dieser Ebene sind die *Mondknoten*, die Verbindungslinie derselben heiſst die *Knotenlinie des Mondes.* Diese Knotenlinie führt nun unter dem Einfluſs der Sonnenanziehung eine, im Sinne der Mondbewegung gerechnet, rückläufige Bewegung aus; sie dreht sich um die Normale der Ekliptik ebenso wie die Knotenlinie der Erde im Sinne des Uhrzeigers, aber mit erheblich gröſserer Geschwindigkeit, nämlich in ca. $18^2/_3$ Jahren einmal um.

Wir können auch diese Knotenbewegung in Zusammenhang mit der Kreiseltheorie bringen und können ihren zahlenmäſsigen Wert von da aus bestimmen. Allerdings müssen wir dabei wesentliche Punkte aus der Theorie des Mondes als bekannt voraussetzen. Wir müssen nämlich von vornherein wissen, daſs die von der Sonne hervorgerufene hauptsächliche Störung der Mondbahn in einer Bewegung ihrer Knoten bei Unveränderlichkeit ihrer Neigung gegen die Ekliptik besteht. Wir müssen ferner wissen, daſs die (bekanntlich ziemlich groſse) Excen-

trizität der Mondbahn, von der wir im Folgenden notgedrungen absehen werden, die Gröfse der Knotenbewegung nicht erheblich beeinflufst, so dafs die Knotenbewegung einerseits und die von der Excentrizität herrührenden Störungen der Mondbahn andrerseits für sich berechnet werden können. In unserer Betrachtung fehlt also, mathematisch gesprochen, der Existenzbeweis für die Mondknotenbewegung; was wir aus der Kreiseltheorie entnehmen können, ist lediglich die Berechnung der Gröfse dieser Bewegung unter Voraussetzung ihrer Existenz.

Wir halten im Folgenden an unserer früheren Vorstellung eines Sonnen- und Mondringes fest, die wir uns beide als starr und kreisförmig denken. Der von uns konstruierte „Erdring", dessen Anziehung wir nachträglich gleichfalls berücksichtigen werden, ist von zu geringer Masse, um für unsere jetzigen Zwecke merklich in Betracht zu kommen, so dafs wir uns zunächst auf die anziehende Wirkung des Sonnenringes beschränken werden. Entsprechend der Bewegung des Mondes um die Erde denken wir uns den Mondring mit der betr. Umlaufsgeschwindigkeit als starres Ganzes kontinuierlich in sich verschoben. Wir haben dann das folgende einfache Problem der Kreiseltheorie vor uns: *Der in Rotation befindliche Mondring steht unter dem Einflufs der Anziehung des Sonnenringes, die ihn in die Ebene der Ekliptik hineinzuziehen sucht; er beschreibt unter dem Einflufs derselben um die Normale der Ekliptik eine reguläre Präcession; welches ist seine Präcessionsgeschwindigkeit?*

Bei dieser Formulierung sind wir in der Anwendung der Gaufsischen Methode über Gaufs selbst einen Schritt hinausgegangen. Während nämlich Gaufs nur die Masse des störenden (des anziehenden) Körpers auf seiner Bahn verteilt, haben wir auch die Masse des gestörten (des angezogenen) Körpers durch eine auf dessen Bahn ausgebreitete kontinuierliche Massenbelegung ersetzt. Während es aber bei der anziehenden Masse, dem Sonnenringe, gleichgültig ist, ob wir uns dieselbe in Bewegung oder in Ruhe denken, ist es bei der angezogenen Masse, dem Mondringe, wesentlich, dafs wir seine Bewegung (in Gestalt einer Verschiebung des Ringes in sich) berücksichtigen. Denn diese Bewegung ist es gerade, die nach den Grundsätzen der Kreiseltheorie die Mondbahn in den Stand setzt, ihre Neigung gegen die Ekliptik gegenüber dem von dem Sonnenringe ausgeübten Drehmomente zu behaupten.

Wir bilden zunächst das Anziehungspotential des Sonnenringes auf den Mondring und leiten daraus die um die Knotenlinie des Mondringes wirkende Drehkraft ab. Sie lautet nach Gleichung (2) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta_2} = -\frac{3}{4} f \frac{m_1 m_2 r_2^2}{r_1^3} \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2; \tag{1}$$

in der That brauchen wir nur die auf den Erdring sich beziehenden Gröfsen $m$, $\vartheta$ und $R$ in der genannten Gleichung durch die auf den Mondring bezüglichen $m_2$, $\vartheta_2 = 5^0$ und $r_2$ zu ersetzen. Schreiben wir hierfür $P_2 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2$, so wird mit Rücksicht auf Gl. (7) des vorigen Paragraphen:

$$(2)\qquad P_2 = -\frac{3}{4} f \frac{m_1 m_2 r_2^2}{r_1^3} = -\frac{3}{4} m_2 r_2^2 \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = -\frac{3\pi^2}{T_1^2} C_2,$$

wo jetzt $C_2 = m_2 r_2^2$ das Trägheitsmoment des Mondringes um seine Figurenaxe bezeichnet.

Eine mögliche Präcessionsbewegung des Mondringes von langer Periode wird wieder hinreichend genau durch die Gleichung (5') des vorigen Paragraphen definiert, welche wir, unter $\mathsf{N}$ die unbekannte Präcessionsgeschwindigkeit, unter $\mathsf{M}$ die Drehgeschwindigkeit des Mondringes verstanden, so zu schreiben haben:

$$(3)\qquad C_2 \mathsf{M}\mathsf{N} = P_2 \cos\vartheta_2;$$

sie ergiebt

$$(4)\qquad \mathsf{N} = -\frac{3\pi^2}{T_1^2 \mathsf{M}} \cos\vartheta_2.$$

Nun bedeutet $\mathsf{M}$ die Winkelgeschwindigkeit des Mondringes in Bezug auf seine Knoten; sie ist gleich derjenigen Winkelgeschwindigkeit, mit welcher, von der Erde aus gesehen, der Mond in seiner Bahn gegen die Mondknoten fortschreitet. Die betr. Umlaufszeit heifst die drakonitische, sie ist gleich 27,2 Tagen*). Mithin wird

$$\mathsf{M} = -\frac{2\pi}{27{,}2} \quad \text{und} \quad \mathsf{M} T_1 = -2\pi \frac{365{,}25}{27{,}2}.$$

Nehmen wir wieder als Zeiteinheit das Jahr, so wird in Gradmafs ausgedrückt

$$(5)\qquad \mathsf{N} = \frac{3}{2} \frac{27{,}2}{365{,}25} \cos 5^0 \cdot 180^0 = 20{,}0^0.$$

Dies wäre die Anzahl Grade, welche die Mondknoten in einem Jahre zurücklegen; die volle Umlaufszeit der Mondknoten würde daher betragen:

$$(6)\qquad \frac{360}{\mathsf{N}} = 18 \text{ Jahre}.$$

Der oben angegebene Wert war $18^2/_3$ Jahre oder genauer 6793 Tage; dem entspricht als genauerer Wert von $\mathsf{N}$ der Betrag $19^1/_3{}^0$. Der

*) Über die Beziehung dieser Winkelgeschwindigkeit zur wahren oder siderischen Winkelgeschwindigkeit des Mondes ist dasselbe zu sagen, wie oben über die Beziehung zwischen $\mu$ und $r$. Bezeichnen wir die siderische Winkelgeschwindigkeit (d. h. die Gröfse $-2\pi$ dividiert durch den siderischen Monat) mit $R$, so gilt wieder $R = \mathsf{M} + \mathsf{N}\cos 5^0$.

Unterschied kann uns bei der Rohheit unserer Vorstellung vom Mondringe, bei der wir von der Excentrizität der Mondbahn absahen, nicht wunder nehmen.

Wir wollen noch ergänzungsweise den Einfluſs der *Erdanziehung* auf die Bewegung der Mondknoten, wenigstens in grober Annäherung, bestimmen. Es ist klar, daſs die Erde nur insofern die Ebene der Mondbahn stören kann, als sie von der Kugelgestalt abweicht, daſs also bei der im vorigen Paragraphen besprochenen Zerlegung der Erde in eine „Erdkugel“ und einen „Erdring“ nur der Erdring von der Masse $m$ (Gl. (1) daselbst) zu berücksichtigen ist. Dieser Erdring $m$ sucht nun ebenso wie der Sonnenring den Mondring in seine Ebene hineinzudrehen, also hier in die Ebene des Erdäquators. Wir schlieſsen wie oben, daſs unter dem Einfluſs dieses Drehmomentes und vermöge der eigenen Umdrehungsgeschwindigkeit des Mondringes die reguläre Präcession um die Normale der genannten Ebene, also hier um die Nord-Süd-Axe der Erde, eine mögliche Bewegungsform des Mondringes sei, wobei wir von der im vorigen Paragraphen untersuchten Eigenbewegung der Erdaxe absehen. Wir wollen die Präcessionsgeschwindigkeit und die Zeitdauer dieser Präcession bestimmen. Indem wir finden, was aus der geringen Masse des Erdringes vorherzusehen war, daſs diese Präcessionsgeschwindigkeit sehr klein, die Präcessionsdauer also sehr lang wird, verglichen mit der entsprechenden Geschwindigkeit und Zeitdauer bei der durch die Sonne hervorgerufenen Mondknotenbewegung, zeigt sich, daſs durch die Einwirkung der Erde die Mondknotenbewegung nur in geringer Weise und in säkularer Form abgeändert wird und daſs wir bei der vorhergehenden Berechnung derselben die Erdanziehung vernachlässigen durften. Die Art dieser (sehr geringfügigen) Abänderung besteht dabei nicht in einer einfachen Beschleunigung oder Verzögerung der durch die Sonne bewirkten Knotenbewegung, sondern sie verändert auch die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, da wie bemerkt die von der Erde bewirkte Präcessionsbewegung um eine andere Axe erfolgt, wie die durch die Sonne bewirkte.

Das Drehmoment des Erdringes auf den Mondring hängt von dem Winkel der Neigung des Mondringes gegen die Äquatorebene der Erde ab. Dieser Winkel wechselt wegen der durch die Sonne bewirkten Knotenbewegung und schwankt in $18^2/_3$ Jahren um $\pm 5^0$. Es ist am einfachsten und liegt am nächsten, jenen Neigungswinkel durch seinen Mittelwert zu ersetzen, d. h. durch den Winkel $\vartheta = 23{,}5^0$, unter dem die Äquatorebene der Erde gegen die Ekliptik geneigt ist. Indem wir dieses thun, sehen wir also wie im ersten Paragraphen von der Neigung

der Mondbahn gegen die Ekliptik ab, denken uns vielmehr den Mondring in die Ekliptik hineingedreht.

Das Drehmoment der Erdanziehung auf den Mondring können wir nun direkt aus der Gl. (2″) des vorigen Paragraphen entnehmen. Die dortige Formel bedeutete das Drehmoment, welches der in die Ekliptik hineingedrehte Mondring auf den Erdring ausübte. Gerade so grofs ist aber das jetzt in Frage stehende Drehmoment. Setzen wir dasselbe gleich $P_2' \sin \vartheta \cos \vartheta$, so wird nach der genannten Gleichung:

$$P_2' = -\frac{3}{2} f \frac{m_2 (C-A)}{r_2^3}.$$

Wir vergleichen das Produkt $P_2' \cos \vartheta$ mit dem Produkte $P_2 \cos \vartheta_2$, unter $P_2$ den in Gl. (2) dieses Paragraphen angegebenen Wert verstanden. Nach Gl. (3) dieses Paragraphen verhält sich nämlich diejenige Winkelgeschwindigkeit, mit der die Mondknoten um die Nord-Süd-Axe der Erde infolge der Anziehung des Erdringes umlaufen würden, zu derjenigen Geschwindigkeit, mit der sie infolge der Sonnenanziehung in der Ekliptik umlaufen, wie $P_2' \cos \vartheta$ zu $P_2 \cos \vartheta_2$. Nennen wir die beiden Geschwindigkeiten $\mathsf{N}'$ bez., wie oben, $\mathsf{N}$, so haben wir

$$\frac{\mathsf{N}'}{\mathsf{N}} = \frac{P_2' \cos \vartheta}{P_2 \cos \vartheta_2} = \frac{2(C-A)}{m_1 r_2^2} \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_2}.$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz (Gl. (7) und (7′) aus § 1) dürfen wir setzen

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{m_1}{M+m_2} \frac{T_1^2}{T_2^2};$$

und erhalten daher:

$$\frac{\mathsf{N}'}{\mathsf{N}} = \frac{2(C-A)}{(M+m_2) r_2^2} \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_2} = 2 \frac{C-A}{C} \frac{C}{(M+m_2) r_2^2} \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_2}.$$

Hier werde noch im Zähler des Ausdrucks ein Näherungswert für $C$ eingesetzt; sehen wir nämlich die Erde vorübergehend als eine Kugel von gleichförmiger Dichte an, so dürfen wir nach einer bekannten Formel $C = \frac{2}{5} MR^2$ annehmen, so dafs sich schliefslich ergiebt:

$$\frac{\mathsf{N}'}{\mathsf{N}} = \frac{4}{5} \frac{C-A}{C} \frac{M}{M+m_2} \frac{R^2}{r_2^2} \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_2}.$$

Die sämtlichen Faktoren dieses Ausdrucks sind bekannte Zahlen. Es ist z. B. das Verhältnis $R/r_2$ gleich ca. 1/60, während das Verhältnis $M/M+m_2$ hinreichend genau gleich 1 genommen werden kann. Mit Benutzung der schon früher angegebenen sonstigen Zahlenwerte ergiebt sich

$$\frac{\mathsf{N}'}{\mathsf{N}} = \frac{4}{5} \frac{1}{305} \left(\frac{1}{60}\right)^2 \left(\frac{365{,}25}{27{,}3}\right)^2 \frac{\cos 23{,}5^0}{\cos 5^0} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}.$$

Die Geschwindigkeit N' ist also aufserordentlich klein gegen die Geschwindigkeit N. Umgekehrt ist die zu N' gehörige Präcessionsdauer aufserordentlich grofs gegen die Periode der Mondknotenbewegung in der Ekliptik, welche $18^2/_3$ Jahre beträgt. Jene Präcessionsdauer würde nämlich sein:

$$\frac{18^2/_3 \cdot 10^4}{1,2} = 156\,000 \text{ Jahren.}$$

Die Gröfse dieser Zahl zeigt unmittelbar, dafs unserer Betrachtung nur die Bedeutung einer *Abschätzung*, nicht die einer *zuverlässigen Berechnung* zukommt. Denn einerseits ändern sich während des genannten Zeitraumes die Elemente der Mondbahn in bedeutendem und nicht vorherzubestimmendem Mafse, während sie in unserer Rechnung als konstant angenommen wurden. Andrerseits und namentlich ändert sich in jenem Zeitraume die Lage des Erdringes im Raume wegen der Knotenbewegung der Erde völlig, während wir doch in unserer Rechnung die Stellung des Erdringes und das von ihm ausgeübte Drehmoment als unveränderlich voraussetzen mufsten. Diese Voraussetzung ist nur für einen Zeitraum zulässig, der klein ist gegen die Präcessionsdauer (26000 Jahre) der Erdknoten, dagegen völlig unhaltbar für den hier gefundenen Zeitraum, der sich sogar gröfser als 26000 Jahre ergeben hat.

Trotzdem wird durch die vorstehende Rechnung soviel bewiesen, als wir ergänzungsweise zu beweisen wünschten: dafs nämlich die von dem Erdringe bewirkte Mondknotenbewegung zu vernachlässigen und dafs lediglich die Sonnenanziehung als mafsgebender Faktor hierbei zu berücksichtigen ist.

## § 3. Die astronomische Nutation der Erdaxe. Verallgemeinerung der Gaufsischen Methode auf periodische Störungen.

Indem wir uns zu der von Bradley 1747 entdeckten *Nutation der Erdaxe* wenden, betonen wir vorab, dafs diese „astronomische“ Nutation mit der früher als Nutation der Kreiselaxe bezeichneten Bewegung in *kinetischer* Hinsicht nichts gemein hat. Die Nutation der allgemeinen Kreiseltheorie (vgl. besonders Kap. V, § 2) rührt daher, dafs der Anfangszustand der Bewegung im Allgemeinen nicht genau auf die reguläre Präcession abgepafst ist und dafs dementsprechend selbst beim Fehlen aller äufseren Kräfte die Figurenaxe im Raume im Allgemeinen einen Kegel beschreibt. Die astronomische Nutation dagegen hat ihren Ursprung darin, dafs auf die sich drehende Erde periodisch veränderliche Kräfte einwirken, welche natürlich eine in gleichem Zeitmafs erfolgende periodische Bewegung der Erdaxe be-

dingen. Indem wir an eine in der gesamten Mechanik ebenso wichtige wie bekannte Unterscheidung anknüpfen, können wir kurz so sagen: *Die frühere Nutation war eine freie, die jetzige ist eine erzwungene Schwingung.*

Die Ähnlichkeit beider Bewegungen, welche die gleiche Wahl der Bezeichnung rechtfertigen möge, ist vielmehr nur *kinematischer* Natur. In beiden Fällen handelt es sich um eine gegen die Periode der Präcession sehr kurze Schwingung. Die Periode der freien Nutation in der allgemeinen Kreiseltheorie beträgt $2\pi A/N$, die der Präcession $2\pi N/P$ (s. z. B. pag. 305, Gl. (13) und (15)), das Verhältnis beider Perioden ist daher die oft genannte Gröſse $AP/N^2$, die wir in der Regel als kleine Zahl (z. B. $< 1/100$) voraussetzen durften. Andrerseits rührt die astronomische Nutation von der Bewegung der Mondknoten her, hat daher wie diese die Periode von $18^2/_3$ Jahren; die Periode der Präcession der Erdaxe wurde zu 26000 Jahren berechnet; das Verhältnis beider Perioden ist daher auch hier sehr klein, sogar $< 1/1000$.

Um die Theorie der astronomischen Nutation an unsere bisherigen Betrachtungen anschlieſsen zu können, müssen wir zunächst unsere von Gauſs übernommene Methode abermals erweitern. In ihrer ursprünglichen Form dient diese Methode nur zur Berechnung der *säkularen Störungen.* Wir werden aber sehen, daſs sie bei geringer Modifikation auch die *periodischen* liefern wird.

Formulieren wir zunächst das Problem der Erdrotation in allgemeinster Weise. Da haben wir auf der einen Seite die Erde, auf der anderen Seite Sonne und Mond, die ihre als bekannt anzusehenden relativen Bahnen um die Erde beschreiben und dementsprechend wechselnde Anziehungen ausüben. Die Gesamtheit der Anziehungswirkungen findet man am einfachsten aus dem *Anziehungspotential* durch Ableitung desselben nach den Koordinaten. Das Potential wird dabei, wie immer bei Störungsaufgaben, aus den relativen Lagen der fraglichen Körper *unter vorläufiger Absehung von den im Verlaufe der Rechnung selbst zu findenden Störungen* berechnet. Da die Störungen sich in der Regel im Verhältnis zur Hauptbewegung als klein ergeben, wird hierdurch nur ein kleiner Fehler entstehen. Wollte man dagegen die gestörte Bewegung selbst bei der Berechnung des Anziehungspotentials zu Grunde legen, so würde man neben den sog. Störungen erster Ordnung, auf die wir im folgenden allein abzielen, zugleich auch die „Störungen zweiter Ordnung" ermitteln. Auch wenn man die letzteren zu kennen wünschte, würde sich immer ein schrittweises Vorgehen und eine vorläufige Beschränkung auf die Störungen erster Ordnung empfehlen. In unserem

Falle haben wir unter der ungestörten Bewegung der Erde ihre gleichmäfsige Rotation um die gegen die Ekliptik geneigte Figurenaxe zu verstehen.

Dieses Potential $V$ der Sonnen- und Mondanziehung auf die Erde wird man nun naturgemäfs in nicht-periodische und periodische Bestandteile spalten. Die periodischen Bestandteile der Sonnenanziehung $V_1$ werden zur Periode das Jahr, die der Mondanziehung $V_2$ teils den Monat, teils den Umlauf der Knoten etc. haben. Die *harmonische Analyse* liefert ein allgemeines methodisches Mittel, um diese Bestandteile von einander zu sondern. Bekanntlich findet man die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe in der Form bestimmter Integrale. So ist der *unperiodische Teil von* $V_1$ gleich $\frac{1}{T_1}\int V_1(t)\,dt$, erstreckt über die Zeit eines vollen Sonnenumlaufs. Diese Formel läfst sich aber deuten als Potential der in geeigneter Weise mit Masse belegten relativen Sonnenbahn. Es sei $dm$ das Massenelement, welches wir auf dem mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ durchlaufenen Bahnelemente $ds$ anbringen. Da das Potential $V_1(t)$ der ganzen Sonnenmasse $m_1$ entspricht, wird das Potential des genannten Massenelementes gleich $\frac{dm}{m_1}V_1(t)$ sein und das gesamte Potential der mit Masse versehenen Sonnenbahn $\frac{1}{m_1}\int V_1(t)\,dm$. Damit Übereinstimmung herrscht zwischen diesem Potential und dem genannten Koeffizienten der trigonometrischen Entwickelung, mufs die Massenverteilung so eingerichtet werden, dafs auf jedes Element der Bahn das Massenelement

$$dm = \frac{m_1\,dt}{T_1} \tag{1}$$

kommt. Die gesamte auf der Bahn aufgetragene Masse ist hiernach genau die gesamte Sonnenmasse $m_1$. Wir haben damit genau den ursprünglichen Gaufsischen Ansatz. Wird überdies die Bahn als kreisförmig, die Geschwindigkeit also als gleichförmig vorausgesetzt, so ist die Massenverteilung eine gleichförmige. Dies war unser Standpunkt bei der obigen Behandlung der Präcession, welche in der That von dem konstanten oder durchschnittlichen Teile der Sonnen- und Mondanziehung herrührt.

Betrachten wir nun die *periodischen Teile.* Indem wir wieder auf die Sonne argumentieren, sei $T_1/n$ die betr. Periode, unter $n$ eine ganze Zahl verstanden. Die Koeffizienten der beiden Terme von dieser Periode in der trigonometrischen Entwickelung sind:

$$\frac{2n}{T_1}\int V_1(t)\cos 2\pi\frac{nt}{T_1}\,dt,\qquad \frac{2n}{T_1}\int V_1(t)\sin 2\pi\frac{nt}{T_1}\,dt. \tag{2}$$

Wir fassen sie wieder auf als Anziehung der mit Masse belegten Sonnenbahn, wobei aber jetzt auf das Bahnelement $ds$ die Masse $m_1 \frac{2n}{T_1} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} 2\pi \frac{nt}{T_1} dt$ kommt, unter $t$ und $dt$ die Zeit resp. das Zeitintervall verstanden, zu der resp. in dem das Element $ds$ von der Sonne durchlaufen wird. Die gesamte zur Verteilung kommende Masse ist jetzt Null, da wir neben positiver auch gleich viel „negative" Masse verwenden müssen. Die Dichte ist, selbst bei kreisförmiger Gestalt der Bahn, nicht gleichförmig sondern harmonisch variabel. Die nachstehenden schematischen Figuren mögen diese Verhältnisse im Falle $n = 0$ und $n = 2$ veranschaulichen.

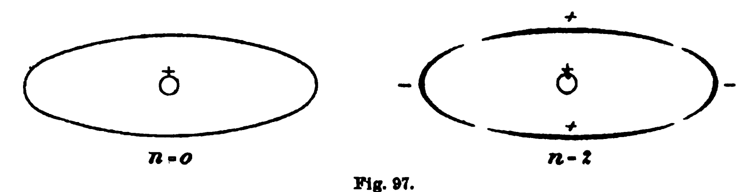



Fig. 97.

Die betr. auf den Erdkörper wirkenden periodischen Drehkräfte ergeben sich aus den berechneten trigonometrischen Koeffizienten durch Ableitung nach den räumlichen Koordinaten und Multiplikation mit $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \frac{2\pi nt}{T_1}$. Sie werden Störungen der Erdaxe von derselben Periode $T_1/n$ hervorrufen. Auf die Berechnung derselben gehen wir hier nicht ein; sie kann nach dem Muster der weiter unten für die astronomische Nutation zu gebenden Entwickelungen erfolgen. Praktisch kommt von solchen Störungen nur diejenige in Betracht, welche die Periode $T_1/2$ hat, sowie die entsprechende von der Mondanziehung herrührende Störung von der Periode $T_2/2$. Auch bei diesen Gliedern übersteigt die Amplitude der Schwankung nur an einer Stelle den Betrag 1″ (s. die Formeln am Schlusse des nächsten Paragraphen). Die Amplituden der übrigen Glieder von den Perioden $T_1$, $T_1/3, \cdots$, $T_2$, $T_2/3, \cdots$ sind so klein, daſs sie selbst für die Bedürfnisse der astronomischen Genauigkeit verschwinden.

Anders diejenigen Störungen, welche die Periode des Umlaufs der Mondknoten besitzen.

Sehen wir zunächst zu, wie sich bei ihnen unsere Methode gestaltet.

So wie wir oben durch gleichzeitige Inbetrachtnahme sämtlicher von Sonne und Mond durchlaufenen Örter ihrer Bahnen den Sonnen- und Mondring erzeugten, so werden wir jetzt, ausgehend von dem gegen die Ekliptik geneigten Mondring, indem wir uns die sämtlichen

Örter vorstellen, die er bei seiner Präcessionsbewegung einnimmt, eine „Mondringfläche“ erhalten. Diese durch Rotation des Mondringes um die Normale der Ekliptik entstehende Mondringfläche ist ersichtlich eine doppelt überdeckte*) Kugelzone vom Radius $r_2$ und der Höhe $2r_2 \sin 5^0$. Die beiden folgenden Figuren deuten die Massenverteilung in den Fällen $n = 0$ und $n = 1$ an, mit der wir unsere Mondringfläche auszustatten haben. Es möge dabei ausdrücklich hervorgehoben werden, dafs die Absicht bei der Einführung unserer Mondringfläche und der Verzeichnung der folgenden Figuren keine andere ist wie diejenige, die das Gaufsische Verfahren überhaupt verfolgt: den Sinn der Rechnungen an einem geometrischen Substrat zu veranschaulichen; die Rechnungen selbst werden dadurch im Grunde nicht vereinfacht, sondern sind genau identisch mit denjenigen, die wir auch bei rein analytischem Vorgehen auszuführen haben würden.

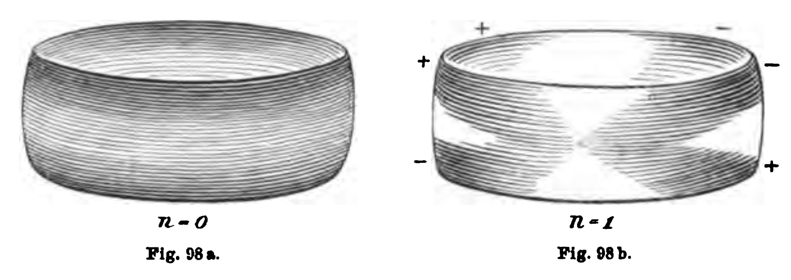



Fig. 98 a. Fig. 98 b.

a) *Im Falle* $n = 0$ (säkulare Störung) ist die Massenverteilung so zu wählen, dafs auf jedes Element der Mondringfläche eine Masse $d\mu$ kommt, die nach Analogie mit Gl. (1) gleich ist dem Produkt aus der Masse des dies Element überstreichenden Elementes der Mondringfläche in das Verhältnis $dt/T$, d. h. in das Verhältnis der Dauer des Überstreichens zu der ganzen Periode der Mondknoten. Wir wollen

*) Wir denken uns die Kugelzone *doppelt überdeckt*, d. h. aus *zwei Schalen bestehend*, die längs ihres oberen und unteren Randes zusammenhängen, weil jede Stelle der Kugelzone von dem rotierenden Mondringe *zweimal* überstrichen wird, einmal von dem in Fig. 99 gezeichneten vorderen, das andere Mal von dem in dieser Figur nicht angedeuteten hinteren Halbbogen. Am einfachsten wird die Vorstellung, wenn wir, der Kugelzone eine gewisse Körperlichkeit zuschreibend, die äufsere Oberfläche derselben als die eine, die innere Oberfläche als die andere Schale auffassen und festsetzen, dafs der Mondring in jeder seiner Lagen am oberen bez. unteren Rande der Kugelzone von der einen auf die andere Schale übertritt. Damit steht die Wahl unserer Koordinaten $\alpha$, $\beta$ im Einklange: wenn wir im Folgenden $\alpha$ und $\beta$ von 0 bis $2\pi$ integrieren, so überstreichen wir damit jede Stelle der Kugelzone doppelt, also jede der beiden Schalen einmal; der einen Schale entsprechen dabei die Werte der Koordinaten $-\pi/2 < \alpha < +\pi/2$, $0 < \beta < 2\pi$, der anderen Schale die Werte $+\pi/2 < \alpha < +3\pi/2$, $0 < \beta < 2\pi$.

in der Ebene des Mondringes einen Winkel $\alpha$ messen, indem wir etwa die Knotenlinie des Mondes $OM$ (vgl. Fig. 99) als $\alpha = 0$ rechnen; jeder Punkt $P$ des Mondringes ist dann durch den Centriwinkel $\alpha = MOP$ charakterisiert. Andrerseits wollen wir den Winkel, den die Mondknotenlinie $OM$ gegen einen willkürlichen festen Anfangsstrahl $OA$ in der Ekliptik bildet, mit $\beta$ bezeichnen; $\psi$ sei der Winkel, den die Knotenlinie der Erde mit demselben Strahl $OA$ bildet. Die Winkel $\alpha$, $\beta$ stellen dann schiefwinklige sphärische Koordinaten auf

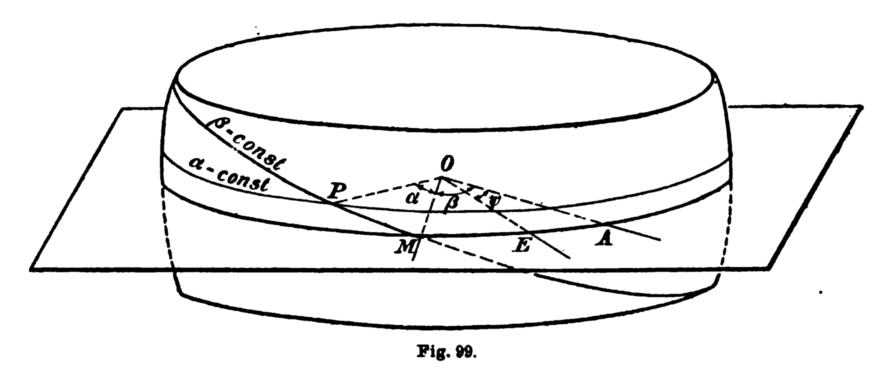



Fig. 99.

unserer Kugelzone dar, durch welche die Lage eines jeden Punktes der Kugelfläche fixiert werden kann und durch welche die Kugelzone in parallelogrammatische Elemente eingeteilt wird. Die auf ein solches Element entfallende Masse $d\mu$ ist nun gleichzusetzen der Masse des Mondringelementes, welches zu dem Winkel $d\alpha$ gehört, nämlich $m_2\, d\alpha/2\pi$, multipliziert in das oben genannte Verhältnis $dt/T$, welches bei gleichförmigem Umlauf der Mondknoten gleich ist $d\beta/2\pi$; man hat also

$$d\mu = \frac{m_2}{4\pi^2}\, d\alpha\, d\beta. \tag{3}$$

Die gesamte zur Verteilung kommende Masse, die sich aus $d\mu$ durch Integration nach $\alpha$ und $\beta$ je zwischen 0 und $2\pi$ ergiebt, ist natürlich gleich der Masse des Mondringes $m_2$.

Die Dichte der Verteilung, d. h. die Masse pro Flächeneinheit der Mondringfläche (zusammen für beide Schalen gerechnet) ist, wie man aus der geneigten Lage des Mondringes leicht versteht, nicht gleichförmig angeordnet, sondern häuft sich an den Rändern der Mondringfläche (für $\alpha = \pm\, \pi/2$) unendlich an. Längs der Breitenkreise ist dagegen die Dichte konstant. In Fig. 98a wurde versucht, diese Verhältnisse durch die Stärke der Schraffierung anzudeuten.

b) *Im Falle* $n = 1$ (periodische Störung) ist die auf der Mondringfläche zu supponierende Massenverteilung auch längs der Breitenkreise

nicht gleichförmig, sondern harmonisch variabel. Es tritt nämlich (vgl. die Formeln (2) für die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe) zu der vorher bestimmten Masse der Faktor $2\cos\beta$ bez. $2\sin\beta$ hinzu. Mithin wird jetzt

$$(4) \qquad d\mu = \frac{m_2}{2\pi^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \beta \, d\alpha \, d\beta.$$

Die gesamte zur Verteilung kommende Masse, die wieder durch Integration von $d\mu$ nach $\alpha$ und $\beta$ zwischen 0 und $2\pi$ gewonnen wird, ist jetzt gleich Null.

Auch jetzt häuft sich die Dichte, die wir als algebraische Summe der auf die Flächeneinheit beider Schalen entfallenden Masse berechnen, nach den Rändern hin an und ist in benachbarten Oktanten der Kugelzone entgegengesetzt gleich. In Fig. 98b wurden diese Verhältnisse teils durch die Stärke der Schraffierung, teils durch Beifügung der Vorzeichen angedeutet.

Nachdem somit die Figuren 98 erläutert sind, bilden wir uns aus den gefundenen Massenbelegungen die zugehörigen Potentiale; und zwar soll das der Belegung (3) entsprechende Potential $U$, die den Belegungen (4) entsprechenden Potentiale $w_1$ und $w_2$ heifsen ($w_1$ zu $\cos\beta$, $w_2$ zu $\sin\beta$ gehörig). Diese Potentiale sind nichts anderes als die ersten Koeffizienten in der nach der Mondknotenperiode fortschreitenden Entwickelung des vom Monde auf die Erde ausgeübten Anziehungspotentiales $V_2(t)$; letzteres drückt sich nämlich durch $U, w_1, w_2$ sowie die Mondknotengeschwindigkeit $\mathsf{N}$ folgendermafsen aus:

$$V_2(t) = U + w_1 \cos \mathsf{N}t + w_2 \sin \mathsf{N}t + \cdots,$$

wofür wir auch abkürzend schreiben:

$$V_2(t) = U + W + \cdots, \qquad W = w_1 \cos \mathsf{N}t + w_2 \sin \mathsf{N}t.$$

Das konstante Glied $U$ gehört also zu dem Werte $n = 0$ des Stellenzeigers der Entwickelung, das zeitlich veränderliche Glied $W$ fafst die beiden zu dem Werte $n = 1$ des Stellenzeigers gehörigen Terme der Entwickelung zusammen.

Aus dem Werte von $U$ können wir nichts wesentlich Neues erfahren, vielmehr müssen wir auf den schon im ersten Paragraphen berechneten Anteil des Mondes an der Präcessionsbewegung der Erde zurückfallen. Wir führen diese Rechnung nur deshalb nochmals durch, um uns zu überzeugen, dafs die früher vernachlässigte Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik die Präcessionserscheinung nur unwesentlich beeinflufst. Aus dem Werte von $W$ dagegen wird sich die Erklärung und Vorausberechnung der astronomischen Nutation ergeben.

a) *Der Fall* $n = 0$. Das Potential eines Elementes $d\mu$ der Mondringfläche auf ein Element $dm$ des Erdringes ist, unter $f$ die Gravitationskonstante verstanden, $f\,d\mu\,dm/r$; daher wird das Potential der ganzen Mondringfläche auf den Erdring:

$$U = f\int\int\frac{d\mu\,dm}{r}. \tag{5}$$

Sind $x, y, z$ bez. $x_2, y_2, z_2$ die Koordinaten eines Punktes des Erdringes bez. des Mondringes, so setzen wir wie früher

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi\cos\vartheta, \quad z = R\sin\varphi\sin\vartheta.$$

Fällt ferner die Mondknotenlinie gerade mit der Erdknotenlinie zusammen, so können wir, bezogen auf das gleiche Koordinatensystem, schreiben:

$$x_2 = r_2\cos\alpha, \quad y_2 = r_2\sin\alpha\cos 5^0, \quad z_2 = r_2\sin\alpha\sin 5^0.$$

Diese Koordinaten entsprechen der besonderen Lage $\beta = \psi$ des Mondringes (vgl. Fig. 99). Bei beliebigem $\beta$ bleibt der Wert von $z_2$ der angegebene, die Koordinaten $x_2, y_2$ aber entstehen aus den vorstehenden nach der Regel der Koordinatentransformation, wobei als Drehwinkel der Winkel $\beta - \psi$ eingeht. Es wird nämlich allgemeingültig:

$$\begin{aligned}
x_2 &= r_2(\cos\alpha\cos(\beta-\psi) - \sin\alpha\cos 5^0\sin(\beta-\psi)),\\
y_2 &= r_2(\cos\alpha\sin(\beta-\psi) + \sin\alpha\cos 5^0\cos(\beta-\psi)),\\
z_2 &= r_2\sin\alpha\sin 5^0.
\end{aligned}$$

Wir berechnen uns hiernach

$$r^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 s,$$

worin $s$ bedeutet:

$$\left\{\begin{aligned}
s = \frac{xx_2 + yy_2 + zz_2}{Rr_2} &= \\
\cos\varphi(\cos\alpha\cos(\beta-\psi) &- \sin\alpha\cos 5^0\sin(\beta-\psi))\\
+ \sin\varphi\cos\vartheta(\cos\alpha\sin(\beta-\psi) &+ \sin\alpha\cos 5^0\cos(\beta-\psi))\\
+ \sin\varphi\sin\vartheta\sin\alpha\sin 5^0.&
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Durch Entwickelung nach Potenzen von $r_2$ folgt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_2}\left(1 + \frac{R}{r_2}s - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r_2^2} + \frac{3}{2}\frac{R^2}{r_2^2}s^2 + \cdots\right). \tag{7}$$

Wir integrieren diesen Ausdruck nach $d\mu$ und $dm$, indem wir $d\mu$ aus (3) entnehmen und $dm$ gleich $\frac{m}{2\pi}d\varphi$ einsetzen. Zunächst wird $\int s\,d\varphi = 0$; ferner liefern von den Gliedern auf der rechten Seite von (7) das erste und dritte Beiträge zu unserem Potential, die von den

die Lage des Erdringes bestimmenden Winkeln $\vartheta$ und $\psi$ frei sind. Da wir später das Potential nach diesen Winkeln zu differenzieren haben werden, fallen auch diese Glieder heraus. Wir schreiben daher die ersten drei Glieder ebenso wie die höheren Glieder der Entwickelung nicht hin und setzen:

$$U = \cdots + \frac{3}{16} f \frac{m m_2}{\pi^3} \frac{R^2}{r_2^3} \cdot \int d\alpha \int d\beta \int d\varphi\, s^2 + \cdots .$$

Man rechnet nun leicht aus, dafs

$$\int d\alpha \int d\beta \int d\varphi\, s^2 = \pi^3 \{(1 + \cos^2\vartheta)(1 + \cos^2 5^0) + 2 \sin^2\vartheta \sin^2 5^0\}.$$

Mithin wird, wenn wir noch für die Masse des Erdringes ihren Wert aus Gl. (1) von § 1 einführen:

$$U = \frac{3}{8} f \frac{m_2 (C - A)}{r_2^3} \{(1 + \cos^2\vartheta)(1 + \cos^2 5^0) + 2 \sin^2\vartheta \sin^2 5^0\}.$$

Das zugehörige Drehmoment auf den Erdring wird nun durch Differentiation nach $\vartheta$ gefunden und lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} &= -\frac{3}{4} f \frac{m_2 (C - A)}{r_2^3} \{1 + \cos^2 5^0 - 2 \sin^2 5^0\} \sin\vartheta \cos\vartheta \\ &= -\frac{3}{2} f \frac{m_2 (C - A)}{r_2^3} \left\{1 - \frac{3}{2} \sin^2 5^0\right\} \sin\vartheta \cos\vartheta . \end{aligned}$$

Dieser Wert läfst sich unmittelbar mit dem im ersten Paragraphen Gl. (2'') für dasselbe Drehmoment abgeleiteten Werte vergleichen. Er unterscheidet sich von jenem, wie man sieht, nur durch Hinzutreten des Faktors

$$1 - \frac{3}{2} \sin^2 5^0 = 1 - 0{,}012.$$

Für die numerische Rechnung spielt dieser Unterschied aber keine Rolle, sofern wir wie im ersten Paragraphen nur die ganzen Sekunden der jährlichen Präcession anzugeben wünschen. Deshalb würde die weitere Behandlung genau so wie dort zu erfolgen haben und wir können alle früheren Resultate auch mit Rücksicht auf die Neigung der Mondbahn als hinreichend genau bestätigen.

b) *Der Fall* $n = 1$. Auch hier gehen wir von der Formel (5) aus, wobei wir aber jetzt unter $d\mu$ die durch (4) definierten Massenverteilungen verstehen und die ihnen entsprechenden Potentiale, wie verabredet, $w_1$ und $w_2$ nennen. $dm$ ist wie oben gleich $\frac{m}{2\pi} d\varphi$, für $\frac{1}{r}$ ist die Entwickelung (7) einzutragen. Indem wir wieder diejenigen Glieder unterdrücken, die bei der Integration nach $\varphi$ oder bei der späteren Differentiation nach $\vartheta$ und $\psi$ verschwinden, schreiben wir:

$$\left.\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right\} = \cdots + \frac{3}{8} f \frac{m m_2}{\pi^3} \frac{R^2}{r_2^3} \int {\cos \atop \sin} \beta\, d\beta \int d\alpha \int d\varphi\, s^2 + \cdots .$$

Führen wir zunächst die Integration nach $\alpha$ und $\varphi$ aus, so erhalten wir aus (6):

$$\int d\alpha \int d\varphi\, s^2 = \pi^2 \{\cos^2(\beta-\psi) + \cos^2 5^0 \sin^2(\beta-\psi) + \cos^2\vartheta \sin^2(\beta-\psi) + (\cos\vartheta \cos 5^0 \cos(\beta-\psi) + \sin\vartheta \sin 5^0)^2\};$$

multiplizieren wir dieses mit $\cos\beta$ oder $\sin\beta$ und integrieren nach $\beta$, so fallen alle diejenigen Terme fort, welche nach Auflösung von $\frac{\cos}{\sin}(\beta-\psi)$ von ungerader Dimension in $\frac{\cos}{\sin}\beta$ sind. Als einziger nichtverschwindender Term bleibt übrig

$$2\pi^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \int \frac{\cos}{\sin}\beta \cos(\beta-\psi)\, d\beta$$
$$= 2\pi^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \frac{\cos}{\sin}\psi.$$

Mithin wird:

$$\left.\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right\} = \frac{3}{4} f \frac{m m_2 R^2}{r_2^3} \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \frac{\cos}{\sin}\psi.$$

Damit ist das Potential der Mondringfläche für die beiden durch Fig. 98b schematisch dargestellten Massenbelegungen oder, wie wir auch sagen können, diejenigen beiden Koeffizienten der trigonometrischen Entwickelung gefunden, welche zu Gliedern von der vollen Periode des Mondknoten-Umlaufs gehören. Die Summe dieser Glieder, welche nach Verabredung $W$ heifsen sollte, wird nun

$$(8) \qquad W = \frac{3}{4} f \frac{m m_2 R^2}{r_2^3} \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \cos(\mathsf{N}t - \psi).$$

Wir formen diesen Ausdruck ein wenig um, indem wir einerseits die Definition von $m$ (Gl. (1) von § 1), andrerseits das dritte Keplersche Gesetz (Gl. (7') von § 1) berücksichtigen und erhalten:

$$(9) \quad W = \frac{3}{2} \frac{m_2}{M+m_2} \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 (C-A) \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \cos(\mathsf{N}t-\psi).$$

Aus dem Potential $W$ leiten wir nunmehr die Drehmomente ab, die auf den Erdring wirken. Da $W$ sowohl von $\vartheta$ wie von $\psi$ abhängt, erhalten wir ein Drehmoment, welches um die Knotenlinie der Erde wirkt, durch Differentiation nach $\vartheta$, ein anderes, welches um die Normale der Ekliptik wirkt, durch Differentiation nach $\psi$. Es ergiebt sich nämlich

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \vartheta} = \dfrac{3}{2} \dfrac{m_2}{M+m_2} \left(\dfrac{2\pi}{T_2}\right)^2 (C-A) \cos 2\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \cos(\mathsf{N}t-\psi), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \psi} = \dfrac{3}{4} \dfrac{m_2}{M+m_2} \left(\dfrac{2\pi}{T_2}\right)^2 (C-A) \sin 2\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \sin(\mathsf{N}t-\psi). \end{cases}$$

Wir sehen uns nun vor das folgende Kreiselproblem gestellt: *Die Erde steht unter dem Einflufs der eben genannten Drehmomente; welches*

*ist ihre Bewegung?* Natürlich haben wir bei der weiteren Behandlung dieses Problems nicht mehr, wie bei der Berechnung des Anziehungspotentiales, von dem Erdring allein, sondern von dem gesamten Erdkörper zu handeln.

Das hiermit definierte Kreiselproblem unterscheidet sich von allen früheren Fragen in zweifacher Hinsicht: einerseits ist zu dem Drehmoment um die Knotenlinie, welches auch im Falle des gewöhnlichen schweren Kreisels vorlag, ein solches um die „Vertikale" (hier die Normale zur Ekliptik) hinzugetreten. Andrerseits sind beide Drehmomente nicht nur mit der Lage des Kreisels sondern auch mit der Zeit veränderlich. Das Zeitmafs dieser Veränderlichkeit bestimmt offenbar auch das Zeitmafs, in welchem die Erde jenen Drehmomenten folgt. Während also bei der in der allgemeinen Kreiseltheorie untersuchten *freien* Nutation die Schwingungsperiode durch Massenverteilung und Bewegungszustand des Kreisels selbst bedingt war, ist die Periode der jetzt zu besprechenden *erzwungenen* Nutation durch den Wechsel der äufseren Kräfte vorgeschrieben und stimmt in unserem Falle mit der Periode der Mondknotenbewegung überein.

Im Allgemeinen kann man sagen, dafs das Problem der erzwungenen Schwingungen, wenn man von besonderen Vorkommnissen (Resonanz etc.) absieht, ein einfacheres ist wie das der freien Schwingungen, eben deshalb weil die Periode der Schwingungen nicht erst aus der Natur des schwingenden Systems erschlossen zu werden braucht, sondern von vornherein bekannt ist. Wenn das Problem in unserem Falle etwas kompliziert aussieht, so liegt dies nur an dem zusammengesetzten Charakter der wirkenden Kräfte. Übrigens ist der Weg, den wir einschlagen werden, vorbildlich für die Behandlung jeder Art erzwungener Schwingungen, falls dieselben hinreichend klein ausfallen. Den erzwungenen Schwingungen können sich allemal noch freie Schwingungen überlagern, wovon wir indessen im vorliegenden Falle absehen dürfen, da wir auf die Möglichkeit solcher freier Schwingungen im nächsten Abschnitt ausführlich zu sprechen kommen.

Mathematisch gesprochen bedeutet das Zurückstellen der freien Schwingungen, dafs wir uns mit einem *partikulären* Integral des vorgelegten Bewegungsproblems begnügen wollen, nämlich mit demjenigen Integral, welches rein periodisch im Zeitmafs des Kraftwechsels veränderlich ist und eben deshalb die *erzwungene* Schwingung heifst. Das *allgemeine* Integral entsteht hieraus durch Hinzufügung der allgemeinsten *freien* Schwingung, d. h. derjenigen allgemeinen Lösung, welche dem kräftefreien Falle entspricht, und zwar in Strenge, wenn das Problem durch lineare Differentialgleichungen festgelegt ist, mit

einem gewissen Grade der Annäherung, wenn, wie im vorliegenden Falle, die Differentialgleichungen des Problems unter Vernachlässigung kleiner Gröfsen auf lineare Gleichungen zurückgeführt werden können.

Bei der Berechnung der erzwungenen Schwingungen des Erdkörpers werden wir uns der *Lagrangeschen Gleichungen in den Koordinaten* $\vartheta$, $\psi$, $\varphi$ bedienen. Auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehen die Komponenten der äufseren Kraft nach jenen Koordinaten, d. h. in unserem Falle:

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0.$$

Der Ausdruck der lebendigen Kraft heifst bekanntlich

$$T = \frac{A}{2}(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta\,\psi'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')^2$$

und liefert:

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = A \sin\vartheta \cos\vartheta\,\psi'^2 - C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')\sin\vartheta\,\psi', \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = [\Theta] = A\vartheta', \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = [\Psi] = A \sin^2\vartheta\,\psi' + C\cos\vartheta(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi'),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = [\Phi] = C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi').$$

Die Lagrangeschen Gleichungen lauten nun:

$$A\vartheta'' - A\sin\vartheta\cos\vartheta\,\psi'^2 + C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')\sin\vartheta\,\psi' = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$

$$\frac{d}{dt}(A\sin^2\vartheta\,\psi' + C\cos\vartheta(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')) = \frac{\partial W}{\partial \psi},$$

während die dritte Gleichung liefert: $[\Phi] = \text{const.}$ Da $[\Phi] = Cr$ ist, wo $r$ die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde um ihre Figurenaxe und $2\pi/r$ die Dauer des Sterntages ist, so wird auch $r$ konstant und mithin die Länge des Sterntages durch die in Rede stehenden Mondstörungen nicht beeinflufst.

Wir führen die Winkelgeschwindigkeit $r = \varphi' + \cos\vartheta\,\psi'$ in die vorstehenden Gleichungen ein und schreiben dieselben einfacher:

$$A\vartheta'' - A\sin\vartheta\cos\vartheta\,\psi'^2 + C\sin\vartheta\,r\psi' = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$

$$\frac{d}{dt}(A\sin^2\vartheta\,\psi' + C\cos\vartheta\,r) = \frac{\partial W}{\partial \psi}.$$

Jetzt berücksichtigen wir, dafs die Winkeländerungen $\psi'$ und $\vartheta'$ erfahrungsgemäfs aufserordentlich viel langsamer erfolgen und eine aufserordentlich viel kleinere Amplitude haben, wie die Umdrehung $r$, dafs daher $r$ sehr grofs sein wird gegen $\varphi'$ und $\vartheta'$. Dementsprechend werden wir alle Glieder linkerhand, welche nicht $r$ als Faktor besitzen, streichen und die vorigen Gleichungen folgendermafsen vereinfachen:

$$C \sin\vartheta\, r\, \psi' = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$

$$-C \sin\vartheta\, r\, \vartheta' = \frac{\partial W}{\partial \psi}.$$

Setzen wir rechterhand die Werte aus (10) ein, so ergiebt sich:

$$\psi' = \frac{3}{2}\frac{m_2}{M+m_2}\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \frac{C-A}{Cr} \sin 5^0 \cos 5^0 \frac{\cos 2\vartheta}{\sin\vartheta} \cos(\mathsf{N}t-\psi),$$

$$\vartheta' = -\frac{3}{2}\frac{m_2}{M+m_2}\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \frac{C-A}{Cr} \sin 5^0 \cos 5^0 \cos\vartheta \sin(\mathsf{N}t-\psi).$$

Hier können wir abermals eine Vereinfachung eintreten lassen, indem wir auf der rechten Seite die in erster Näherung gefundenen Werte für $\psi$ und $\vartheta$ (s. Gl. (11) aus § 1), nämlich $\psi = \psi_0 + 50''t = \psi_0 + \nu t$, $\vartheta = 23^0 27' 7'' = \vartheta_0$ eintragen. Die Integration nach $t$ läfst sich dann leicht ausführen und liefert:

$$(11)\quad \begin{cases} \vartheta = \frac{3}{2}\frac{m_2}{M+m_2}\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \frac{C-A}{Cr} \frac{\sin 5^0 \cos 5^0}{\mathsf{N}-\nu} \cos\vartheta_0 \cos(\mathsf{N}t-\nu t-\psi_0), \\ \psi = \frac{3}{2}\frac{m_2}{M+m_2}\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \frac{C-A}{Cr} \frac{\sin 5^0 \cos 5^0}{\mathsf{N}-\nu} \frac{\cos 2\vartheta_0}{\sin\vartheta_0} \sin(\mathsf{N}t-\nu t-\psi_0). \end{cases}$$

*In diesen Gleichungen ist die theoretische Darstellung der astronomischen Nutation gewonnen.* Wie wir sehen ist sowohl der Winkel $\vartheta$ wie der Winkel $\psi$ einer harmonischen Schwankung unterworfen, deren Periode mit der der Mondknoten $2\pi/\mathsf{N}$ zusammenfällt. (Wir können nämlich die Winkelgeschwindigkeit $\nu$ der Erdknoten gegen die der Mondknoten $\mathsf{N}$ ohne Weiteres vernachlässigen.) Um die numerischen Werte der Amplituden zu finden, welche bez. $a$ und $b$ heifsen mögen, berechnen wir zunächst:

$$\frac{b}{a} = 2 \operatorname{ctg} 2\vartheta_0 = 1{,}9.$$

Ferner wird, wegen der früher angegebenen Werte, wenn wir das Jahr als Zeiteinheit nehmen:

$$\frac{M}{m_2} = 82, \quad \frac{C-A}{C} = \frac{1}{305}, \quad T_2 = \frac{27^1/_3}{365^1/_4}, \quad r = -2\pi\cdot 366^1/_4, \quad \mathsf{N} = \frac{2\pi}{18^2/_3},$$

also die Amplitude von $\vartheta$, in Sekunden ausgedrückt:

$$a = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{83}\cdot\frac{(365^1/_4)^2}{366^1/_4}\cdot\frac{18^2/_3}{(27^1/_3)^2}\cdot\frac{0{,}087\cdot 0{,}917}{305}\cdot\frac{360\cdot 60\cdot 60}{2\pi} = 9''.$$

Hieraus folgt

$$b = 1{,}9 \cdot a = 17''.$$

Am Himmelsgewölbe beschreibt die Erdaxe hiernach eine kleine Ellipse, die nach ihrem Entdecker die Bradleysche Ellipse heifst. Die grofse Axe derselben beträgt $a = 9''$; sie ist nach dem Pole der Ekliptik

hingerichtet. Die kleine Axe wird, wie eine elementargeometrische Überlegung zeigt, $b \sin \vartheta_0 = 7''$.

Wir wollen schliefslich die am Schlusse des ersten Paragraphen gegebene Darstellung der Erdaxenbewegung (Gl. (11) von pag. 643) durch Hinzufügung von Nutationsgliedern vervollständigen. Sie lautet alsdann:

$$(12) \qquad \begin{cases} \psi = \psi_0 + 50'' t + 17'' \sin(\mathsf{N}t - \psi_0), \\ \vartheta = 23^0 27' + 9'' \cos(\mathsf{N}t - \psi_0). \end{cases}$$

## § 4. Schlufsbemerkungen zum Problem der Präcession und Nutation. Die Bestimmung der Mondmasse und der Elliptizität der Erde.

Mit den bisherigen Korrektionen ist aber die Sache noch lange nicht abgethan. Zunächst kann man den Einflufs der Mondknotenbewegung weiter verfolgen und Glieder von der Periode $\frac{4\pi}{\mathsf{N}}$, $\frac{6\pi}{\mathsf{N}}$ etc. berechnen. Die ersteren werden in der Praxis wirklich berücksichtigt, obgleich ihre Amplituden nur den zehnten bez. fünften Teil einer Sekunde betragen. Sodann aber wäre die Excentrizität der Sonnen- und namentlich die der Mondbahn und deren Apsidenbewegung zu berücksichtigen, durch welche nicht nur die periodischen Glieder, sondern auch der säkulare Präcessionsterm beeinflufst wird. Die hieraus resultierende Korrektion der Präcessionsgeschwindigkeit beträgt abermals weniger als 1″.

Ferner wollen wir hier nochmals auf die oben besprochenen aber nicht durchgerechneten Einflüsse hinweisen, welche von der wechselnden Stellung von Sonne und Mond in ihrer Bahn herrühren und welche zur Periode einen aliquoten Teil des Sonnen- oder Mondumlaufs haben.

Endlich ist zu bedenken, dafs alle Elemente, welche in unsere Rechnungen eingehen, säkularen Änderungen unterworfen sind, so die Excentrizität der Sonnenbahn, die Lage der Ekliptik am Fixsternhimmel etc., Änderungen, welche man üblicher Weise in eine nach Potenzen von $t$ fortschreitende Reihe entwickelt. Hieraus folgt insbesondere, dafs auch die Präcessionsgeschwindigkeit nicht einfach der Zeit proportional ist, sondern ihrerseits durch eine Potenzreihe in $t$ dargestellt wird. Allerdings ist schon der Koeffizient von $t^2$ in dieser Reihe äufserst klein, ca. $10^{-4} \cdot 1''$; trotzdem genügt sein Vorhandensein, um Resultate, welche sich auf eine längere Reihe von Jahren beziehen und nur aus dem ersten Gliede ($\nu t$) gezogen sind, wie z. B. die am Anfang dieses Abschnittes gegebene Berechnung der Periode von 26 000 Jahren, einigermafsen illusorisch erscheinen zu lassen.

Bei Berücksichtigung dieser verschiedenen Einflüsse werden die Formeln für die Bewegung der Erdaxe wesentlich komplizierter. Die

Präcession wird nicht mehr eine gleichförmige, sondern wegen der zuletzt genannten Verhältnisse eine etwas beschleunigte oder verzögerte sein. Aufserdem wird sich der bisher besprochenen hauptsächlichen Nutation eine Reihe sekundärer Nutationen, z. B. eine Nutation von der halben Periode der Mondknoten, von der halben Periode des Sonnen- und Mondumganges etc. überlagern. Um ein Bild von den so entstehenden Formeln zu geben, setzen wir als Gegenstück zu den Näherungsformeln vom Schlusse des vorigen Paragraphen die folgende vollständigere Beschreibung der Erdaxenbewegung her. Dieselbe ist, mit Abänderung der Bezeichnungen dem Werke von Tisserand*) entnommen; der Ursprung und die Bedeutung der einzelnen Terme wird nach dem Vorhergehenden klar sein:

$$\begin{aligned}\psi = {} & 50'',37140\,t - 0'',00010881\,t^2 \\ & - 17'',251 \sin \mathrm{N}t + 0'',207 \sin 2\mathrm{N}t \\ & - 1'',269 \sin \frac{4\pi t}{T_1} - 0'',204 \sin \frac{4\pi t}{T_2}, \\ \vartheta = {} & 23^0\,27'\,32'',0 + 0'',00000719\,t^2 \\ & + 9'',223 \cos \mathrm{N}t - 0'',090 \cos 2\mathrm{N}t \\ & + 0'',551 \cos \frac{4\pi t}{T_1} + 0'',089 \cos \frac{4\pi t}{T_2}.\end{aligned}$$

Auch diese vollständigere Formel beansprucht nicht, exakt zu sein, und darf ebensowenig wie unsere frühere Darstellung auf beliebig lange Zeiträume ausgedehnt werden. Ihr Zweck ist vielmehr nur der, unter den heutzutage gültigen Werten der astronomischen Konstanten die Vorausbestimmung der Lage der Erdaxe für einen den Bedürfnissen des rechnenden Astronomen genügenden Zeitraum zu ermöglichen. Andere Autoren**) geben noch längere Formeln an.

Zum Schlusse dieses Abschnittes haben wir noch einen gewissen Zirkelschlufs zu besprechen, den wir uns im Vorangehenden bei den numerischen Rechnungen zu Schulden kommen lassen mufsten und auf den bereits pag. 642 hingewiesen wurde. Es handelt sich um das *Verhältnis Erdmasse zu Mondmasse* $M/m_2$ und um die sog. *Elliptisität der Erde* (vgl. wegen der Benennung § 8 des vorigen Kap.), d. h. das Verhältnis $(C-A)/A$. Während wir im Vorstehenden gewisse Zahlenwerte für diese Gröfsen zu Grunde legten, um daraus die Gröfse der

*) l. c. tome 2, § 192, Gl. (m) und (n). Übrigens haben wir zwei der Tisserandschen Glieder unterdrückt, welche im Vorstehenden keine Erklärung gefunden haben.

**) Z. B. Th. Oppolzer, Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, Leipzig 1870 und 1882, Bd. I, erster Teil.

Präcessionsgeschwindigkeit und die Amplituden der Nutation zu berechnen, liegt in Wirklichkeit die Sache so, dafs die zuverlässigsten Zahlenwerte jener beiden Verhältnisse eben aus der Beobachtung von Präcession und Nutation gefolgert werden. Damit entfällt dann logischer Weise die Möglichkeit, die Präcession und Nutation vorauszuberechnen. Außerdem liegt auch noch die physikalische Voraussetzung zu Grunde, dafs man die Erde für die hier berechneten Wirkungen als starr ansehen darf, worauf wir im folgenden Abschnitt zurückkommen.

Wir sahen oben, dafs sowohl in den theoretischen Ausdruck der Präcessionsgeschwindigkeit $\nu$ (Gl. (6′) von pag. 641) wie in den Ausdruck der Nutationsamplituden $a$ und $b$ (Gl. (11) von pag. 660) die beiden Gröfsen $(C-A)/C$ und $M/m_2$ eingehen. Entnehmen wir also den Beobachtungen zwei möglichst genaue Werte, beispielsweise von $\nu$ und $a$, so haben wir zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten $(C-A)/C$ und $M/m_2$. Man findet auf solche Weise als die heutzutage vertrauenswürdigsten Werte dieser beiden Unbekannten*)

$$\frac{C-A}{C}=\frac{1}{304,9},\quad \frac{M}{m_2}=81,58.$$

Dem entsprechen die oben benutzten abgekürzten Zahlenwerte $1/305$ und 82. Für die sog. Elliptizität ergibt sich mit derselben Näherung $(C-A)/A=1/304$.

Übrigens stimmen die auf anderen Wegen hierfür erhaltenen Zahlen (z. B. aus der Gradmessung der Erde, aus den Störungen der Mondbahn durch die Erde und der Erdbahn durch den Mond) mit den angegebenen Zahlen soweit überein, als man es bei der gröfseren Unsicherheit dieser letzteren Bestimmungsweisen erwarten kann.

---

## B. Geophysikalische Anwendungen.

### § 5. Die Eulersche Periode der Polschwankungen, theoretische Behandlung.

Es ist uns von früher her wohlbekannt, dafs unter dem Einflufs der Schwere die *reine Präcessionsbewegung* des Kreisels einen Ausnahmefall darstellt, dafs diese Bewegung im Allgemeinen von periodischen Schwankungen der Kreiselaxe überlagert wird, welche aller-

*) Vgl. S. Newcomb, Fundamental Constants of Astronomy. Washington 1895, pag. 133.

dings bei hinreichend starkem Eigenimpuls in der Regel unmerklich klein werden. Diese Schwankungen wurden *Nutationen* schlechtweg genannt; wir werden sie jetzt zum Unterschied von den im vorigen Abschnitt besprochenen Nutationen als *freie Nutationen* bezeichnen. Aus der Zusammensetzung dieser freien Nutationen mit der gleichförmigen Präcession entstand unsere *„pseudoreguläre Präcession"*.

Es drängt sich uns nun die Frage auf: Ist die im vorigen Abschnitt berechnete Präcession der Erdaxe von Schwankungen begleitet, welche nicht von den äußeren Kräften erzwungen sind, sondern die freien Schwingungen des Systems darstellen? oder, kürzer gesagt: *Ist die Rotationsbewegung der Erde*, wenn wir von allen erzwungenen Schwankungen absehen, *eine reguläre oder eine pseudoreguläre Präcession?*

Die Beantwortung dieser Frage erfordert das Zusammenwirken von Theorie und Beobachtung. Wir geben zunächst die Theorie.

Das Wort Erdaxe ist zweideutig. Man bezeichnet damit einerseits die *Figurenaxe* der Erde, d. h. diejenige Hauptträgheitsaxe der Erde, welche ungefähr mit der Verbindungslinie von Nord- und Südpol zusammenfällt, also eine *im Erdkörper feste* Axe; andrerseits meint man damit die *augenblickliche Rotationsaxe* der Erddrehung, also eine Gerade, welche genau den instantanen Nord- und Südpol verbindet und daher instantan *im Raume fest* ist. Daſs beide Bedeutungen nicht zusammenfallen, ist gerade der Gegenstand der folgenden Erörterungen, bei denen wir zwischen Figuren- und Rotationsaxe wohl zu unterscheiden haben.

Die Bewegungen der *Figurenaxe* bei der pseudoregulären Präcession wurden pag. 291 erörtert. Sie wurden in den Winkeln $\vartheta$ und $\psi$ durch die folgenden angenäherten Gleichungen bestimmt (s. pag. 303, Gl. (11)):

$$
(1) \qquad \begin{cases} \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 + a\sin\vartheta_0 \sin\dfrac{N}{A}t, \\ \psi = \dfrac{P}{N}t + \dfrac{a}{\sin\vartheta_0}\cos\dfrac{N}{A}t, \end{cases}
$$

wo $a$ durch die pag. 296 definierte Größe $n'$ sich folgendermaßen ausdrückte:

$$
(1') \qquad a = \frac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \frac{AP}{N^2}\sin\vartheta_0 .
$$

Die ersten Glieder der rechten Seiten von (1) geben den Präcessionsbestandteil der Bewegung und kommen für das Folgende nicht in Betracht. Wir bemerken nur, daſs die Gröſse $P$, die beim Kreisel gleich $MgE$ war, im Falle der Erde durch $P\cos\vartheta_0$ zu ersetzen ist, wo $P$ durch den Ausdruck (3) von pag. 640 bestimmt ist. Die zweiten Glieder liefern die freie Nutation und interessieren uns hier ausschlieſslich. Sie be-

deuten eine *kreisförmige Schwingung* (vgl. pag. 305), d. h. der Durchschnitt der Figurenaxe mit dem Himmelsgewölbe beschreibt, wenn man von der Präcessionsbewegung und den im vorigen Paragraphen betrachteten erzwungenen Schwankungen absieht, einen kleinen Kreis am Himmel. Die scheinbare Gröfse des Radius beträgt $a$ und hängt von der Anfangslage des Impulses ab, auf welche sich die Gröfse $n'$ in Gl. (1') bezieht. $\vartheta_0$ bedeutet die mittlere Neigung der Figurenaxe gegen die Normale zur Ekliptik während dieser Kreisschwingung. Die Schwingungsperiode $\tau$, d. h. die Zeit, in der der Kreis einmal durchlaufen wird, ist durch die Gleichung bestimmt

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{N}{A} = \frac{C}{A} r,$$

wo $r$, die Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung, gleich $2\pi$ dividiert durch die Länge des Sterntages ist. Nehmen wir letzteren zur Zeiteinheit, so wird $r = 2\pi$ und $\tau = A/C$. *Die Schwingungsperiode ist also*, da $C$ nur wenig gröfser ist als $A$, *ein wenig kleiner als ein siderischer Tag.*

Dies Resultat war vorherzusehen. Wenn nämlich die Figurenaxe mit der Rotationsaxe nicht zusammenfällt, wird erstere um letztere auf einem Kreiskegel herumgeführt. Stände nun die Rotationsaxe völlig still, so würde die Periode genau einen Tag betragen; wechselt sie langsam ihren Platz, so weicht die Periode nur wenig von einem Tage ab.

Indessen läfst sich die somit als möglich nachgewiesene nahezu eintägige Schwankung der Figurenaxe durch die Beobachtung nicht feststellen, weil sich die Beobachtung am Himmel notwendig auf den Wechsel der Rotationsaxe bezieht. Zu letzterer wenden wir uns jetzt.

Dabei werden wir zu unterscheiden haben zwischen dem *Wechsel der Rotationsaxe gegen den Raum* und ihrem *Wechsel relativ gegen den Erdkörper*. Ersterer wird bestimmt durch die Komponenten $\pi, \varkappa, \varrho$, letzterer durch die Komponenten $p, q, r$ des Drehungsvektors, welche beide durch die Gl. (7) und (8) von pag. 45 mit den Eulerschen Winkeln $\varphi, \psi, \vartheta$ in Beziehung gesetzt sind. Die $\pi, \varkappa, \varrho$ sind die Koordinaten der Punkte der *Herpolhodie*, die $p, q, r$ die der *Polhodie*.

Die Werte der $\pi, \varkappa, \varrho$ lauteten

$$(2) \qquad \begin{cases} \pi = \vartheta' \cos\psi + \varphi' \sin\vartheta \sin\psi, \\ \varkappa = \vartheta' \sin\psi - \varphi' \sin\vartheta \cos\psi, \\ \varrho = \psi' + \cos\vartheta\, \varphi'; \end{cases}$$

sie beziehen sich auf ein im Raume festes Koordinatensystem $x, y, z$,

dessen dritte Axe in unserem Falle mit der Normalen der Ekliptik zusammenfällt, (weil wir von dieser aus den Winkel $\vartheta$ messen), und dessen erste Axe der in der Ekliptik gelegene Strahl $\psi = 0$ ist (nach allgemeiner Festsetzung über die Messung des Winkels $\psi$). Es ist aber bequemer ein Koordinatensystem zu benutzen, dessen dritte Axe mit der mittleren Lage der Figurenaxe zusammenfällt, also gegen die Normale der Ekliptik um den Winkel $\vartheta_0$ geneigt ist. Die erste Axe des neuen Systems möge mit der ersten Axe des alten Systems übereinstimmen. Bezeichnen wir die Koordinaten des Drehungsvektors in diesem neuen System mit $\pi_1$, $\varkappa_1$, $\varrho_1$, so wird ersichtlich

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi, \\ \varkappa_1 &= \quad \varkappa \cos\vartheta_0 + \varrho \sin\vartheta_0, \\ \varrho_1 &= -\varkappa \sin\vartheta_0 + \varrho\cos\vartheta_0. \end{aligned}$$

Setzen wir aus (2) ein, so ergiebt sich

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \pi_1 &= \vartheta'\cos\psi + \varphi'\sin\vartheta\sin\psi, \\ \varkappa_1 &= \quad \vartheta'\cos\vartheta_0\sin\psi - \varphi'(\sin\vartheta\cos\vartheta_0\cos\psi - \sin\vartheta_0\cos\vartheta) + \psi'\sin\vartheta_0, \\ \varrho_1 &= -\vartheta'\sin\vartheta_0\sin\psi + \varphi'(\sin\vartheta_0\sin\vartheta\cos\psi + \cos\vartheta_0\cos\vartheta) + \psi'\cos\vartheta_0. \end{aligned}\right.$$

Nun ist zu berücksichtigen, daſs nach (1) $\vartheta - \vartheta_0$ und $\psi$, sowie die Differentialquotienten $\vartheta'$ und $\psi'$ kleine Gröſsen sind; lassen wir auſserdem den uns hier nicht interessierenden Präcessionsterm $Pt/N$ fort, so werden alle jene Gröſsen von der Ordnung der Nutationsamplitude $a$. Wir können nämlich, indem wir $\cos\vartheta$ entwickeln, statt (1) schreiben:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta - \vartheta_0 = -a\sin\left(\frac{N}{A}t\right), && \vartheta' = -\frac{aN}{A}\cos\left(\frac{N}{A}t\right), \\ &\sin\vartheta_0\,\psi = \quad a\cos\left(\frac{N}{A}t\right), && \sin\vartheta_0\,\psi' = -\frac{aN}{A}\sin\left(\frac{N}{A}t\right). \end{aligned}\right.$$

In den Gleichungen (3) sollen nur die Glieder niedrigster Ordnung der kleinen Gröſsen beibehalten werden. Wir setzen daher $\cos\psi = 1$, $\sin\psi = \psi$, $\sin\vartheta\sin\psi = \sin\vartheta_0\cdot\psi$, $\vartheta'\sin\psi = 0$ etc. und erhalten:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \vartheta' + \varphi'\sin\vartheta_0\cdot\psi, \\ \varkappa_1 &= -\varphi'(\vartheta - \vartheta_0) + \psi'\sin\vartheta_0, \\ \varrho_1 &= \varphi' + \psi'\cos\vartheta_0. \end{aligned}$$

Des Weiteren bemerken wir, daſs $\varphi' + \cos\vartheta_0\psi'$ nach den Gleichungen (7) von pag. 45 gleich der Winkelgeschwindigkeit $r$ der Erdumdrehung, also gleich $2\pi$ ist, wenn wir wieder den Sterntag als Zeiteinheit wählen. Die letzte Gleichung lautet daher $\varrho_1 = 2\pi$; in den beiden ersten Gleichungen dürfen wir direkt $\varphi' = 2\pi$ nehmen,

weil hier $\varphi'$ mit den kleinen Gröfsen $\psi$ und $\vartheta - \vartheta_0$ multipliziert erscheint. Somit folgt:

$$\pi_1 = \vartheta' + 2\pi \sin\vartheta_0 \psi,$$
$$\varkappa_1 = -2\pi(\vartheta - \vartheta_0) + \psi' \sin\vartheta_0,$$
$$\varrho_1 = 2\pi.$$

Indem wir nun die Werte von $\psi$, $\psi'$ etc. aus (4) eintragen und berücksichtigen, dafs $N = Cr = 2\pi C$ ist, erhalten wir schliefslich die folgende *Darstellung der Herpolhodie:*

$$(5)\qquad \begin{cases} \pi_1 = -2\pi a \dfrac{C-A}{A} \cos 2\pi \dfrac{C}{A} t, \\ \varkappa_1 = -2\pi a \dfrac{C-A}{A} \sin 2\pi \dfrac{C}{A} t, \\ \varrho_1 = 2\pi. \end{cases}$$

Wir erkennen hieraus: *Die Rotationsaxe beschreibt im Raume einen Kreiskegel um die Richtung unserer dritten Koordinatenaxe $\varrho$, d. h. um die mittlere Lage der Figurenaxe. Die Zeitdauer, in der sie diesen Kreiskegel einmal durchläuft, ist wieder $\tau = A/C$, also wenig kleiner wie ein Sterntag.*

Wir können auch sagen, dafs in der gleichen Zeit der Schnittpunkt der Rotationsaxe mit dem Himmelsgewölbe einen Kreis durchläuft. Der scheinbare Radius desselben, gemessen durch denjenigen Winkel, unter dem er von der Erde gesehen wird, beträgt (bei Vertauschung der trigonometrischen Tangente mit dem Bogen):

$$\frac{\sqrt{\pi_1^2 + \varkappa_1^2}}{\varrho_1} = a\,\frac{C-A}{A}.$$

Dieser Radius ist erheblich kleiner wie der scheinbare Radius $a$ desjenigen Kreises, den der Schnittpunkt der Figurenaxe mit dem Himmelsgewölbe beschreibt. Wir fanden nämlich (vgl. pag. 663)

$$(6)\qquad \frac{C}{C-A} = 305, \quad \text{also} \quad \frac{A}{C-A} = 304.$$

*Die Schwankung der Rotationsaxe im Raume beträgt also kaum den $300^{\text{ten}}$ Teil derjenigen der Figurenaxe.* Da sich nun, wie wir sehen werden, aus den Beobachtungen ergiebt, dafs die Winkelgröfse $a$ hart an der Grenze des Beobachtbaren liegt, so wird sich die Winkelgröfse $a\,\frac{C-A}{A} = a/304$ der Beobachtung völlig entziehen. *Man wird also für alle praktischen Fragen annehmen dürfen, dafs die Rotationsaxe im Raume völlig stille steht.*

Natürlich ist die obige Darstellung der Herpolhodiekurve nicht völlig exakt, weil wir erstens höhere Glieder weggelassen und zweitens

die Präcessionsterme vernachlässigt haben. Hätten wir letztere mit berücksichtigt, so hätten wir statt des Kreises am Himmelsgewölbe eine sehr eng verschlungene Cykloide bekommen.

Interessanter ist das Studium der *Polhodie.* Ihre Koordinaten $p, q, r$ sind durch die Gleichungen (7) von pag. 45 gegeben:

$$\begin{aligned} p &= \vartheta' \cos\varphi + \psi' \sin\vartheta \sin\varphi, \\ q &= -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ r &= \varphi' + \cos\vartheta\,\psi'. \end{aligned}$$

Die letzte Koordinate ist konstant, nämlich bei unserer Wahl der Zeiteinheit gleich $2\pi$. In den beiden ersten Gleichungen setzen wir für $\vartheta'$ und $\psi'$ die Werte aus (4) ein, schreiben, unter Vernachlässigung kleiner Gröſsen höherer Ordnung, $\sin\vartheta = \sin\vartheta_0$, $\varphi = 2\pi t$, $N = 2\pi C$ und erhalten:

$$\begin{aligned} p &= -2\pi a \frac{C}{A}\left(\cos 2\pi \frac{C}{A} t \cos 2\pi t + \sin 2\pi \frac{C}{A} t \sin 2\pi t\right), \\ q &= 2\pi a \frac{C}{A}\left(\cos 2\pi \frac{C}{A} t \sin 2\pi t - \sin 2\pi \frac{C}{A} t \cos 2\pi t\right), \\ r &= 2\pi \end{aligned}$$

oder:

$$(7) \qquad \begin{cases} p = -2\pi a \dfrac{C}{A} \cos 2\pi \dfrac{C-A}{A} t, \\ q = -2\pi a \dfrac{C}{A} \sin 2\pi \dfrac{C-A}{A} t, \\ r = 2\pi. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte *Darstellung der Polhodie.* Sie zeigt uns, *daſs die Rotationsaxe auch im Erdkörper einen Kreiskegel beschreibt und zwar um die Figurenaxe der Erde. Der Winkel an der Spitze desselben* zwischen der Figurenaxe und den Erzeugenden des Kegels ist (bei Vertauschung der trigonometrischen Tangente mit dem Bogen):

$$\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = a \frac{C}{A}.$$

Dieser Winkel ist also $C/(C-A) = 305$ mal gröſser wie der entsprechende Winkel des Herpolhodiekegels. *Die Zeit, in der die Rotationsaxe den Polhodiekegel einmal durchläuft,* beträgt dabei $A/(C-A) = 304$ Sterntage oder rund 10 Monate. Diese Zeit heiſst die *Eulersche Periode* oder der *Eulersche Cyklus,* weil bereits Euler*) die nötigen theoretischen Vorarbeiten zur Berechnung dieser Periode geliefert hat.

*) Mechanica sive motus scientia. Petersburg 1736, dritter Teil, Kap. XVI, § 839 ff. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, Greifswald 1765, Kap. XII, §§ 711, 717—732. Der numerische Wert 304 scheint allerdings bei Euler noch nicht vorzukommen.

Natürlich sind auch die Gleichungen (7) nicht ganz vollständig, insofern wir bei ihrer Ableitung von den Präcessionsgliedern abgesehen haben; wollten wir letztere mit berücksichtigen, so würden zu den obigen Werten der $p$ und $q$ noch gewisse leicht angebbare Glieder von sehr kleinem Betrage und von der Periode eines Sterntages hinzukommen.

Übrigens lassen sich die obigen Werte der $p$ und $q$ auch unmittelbar aus den Eulerschen Gleichungen entnehmen, wenn man bedenkt, daſs die in Rede stehende Bewegung eine freie Nutation ist, und dementsprechend bei ihrer Berechnung von den äuſseren Kräften (Sonnen- und Mondanziehung) abstrahiert. Die Eulerschen Gleichungen lauten dann (vgl. pag. 140) für $A = B$ und $r = \text{const.} = 2\pi$:

$$A\frac{dp}{dt} = 2\pi(A - C)q, \quad A\frac{dq}{dt} = 2\pi(C - A)p$$

und geben integriert (vgl. pag. 151, Gl. (6')):

$$p + iq = ce^{2\pi i \frac{C-A}{A}t}.$$

Man braucht schlieſslich nur in einen reellen und imaginären Teil aufzulösen, um im Wesentlichen (nämlich bis auf die abgeänderte Bezeichnung der Integrationskonstanten) die Gleichungen (7) wiederzufinden.

Es ist nützlich, diese Verhältnisse im Sinne Poinsots durch die Figur des Polhodie- und Herpolhodiekegels zu veranschaulichen und mit derjenigen Figur zu vergleichen, welche in gleicher Weise die Verhältnisse bei der (durch Sonnen- und Mondanziehung erzwungenen) Präcession der Erdaxe darstellt. Dies geschehe in den Fig. 100a und b.

In Fig. 100a (erzwungene Präcession) findet die Bewegung der Erdaxe um die Normale der Ekliptik ($N$) in dem mehrfach genannten ungefähren Zeitraum von 26000 Jahren statt. Der Winkel an der Spitze des Herpolhodiekegels (eigentlich Winkel zwischen der Normalen $N$ *und* der *Rotationsaxe*, wofür wir aber ohne irgend einen Fehler auch den Winkel zwischen der Normalen $N$ und der *Figurenaxe* nehmen können) beträgt $23\frac{1}{2}^0$. Die Öffnung des Polhodiekegels wurde pag. 49 berechnet und nach Gl. (2) daselbst gefunden zu $\sin 23\frac{1}{2}^0 / 365 \cdot 26000$ = ungefähr 0,01″; die Kleinheit des Polhodiekegels wurde a. a. O. durch die Angabe veranschaulicht, daſs er auf der Erdoberfläche einen um den Nordpol beschriebenen Kreis von nur 27 cm Radius ausschneidet. Wir haben also einen *ziemlich weiten Herpolhodiekegel und einen äuſserst spitzen Polhodiekegel*. In Fig. 100a konnten wir natürlich nicht annähernd das wirkliche quantitative Verhältnis beider Kegel zum Aus-

druck bringen; vielmehr ist der Polhodiekegel verhältnismäfsig fast $10^6$ mal zu breit gezeichnet. Wir haben uns vorzustellen, dafs der in der Erde feste und an der Erdumdrehung teilnehmende Polhodiekegel sich in einem Tage, von $F$ aus gesehen *entgegen* dem Uhrzeigersinne, einmal umdreht und dabei ohne zu gleiten im Innern des Herpolhodiekegels abrollt. Wegen seiner aufserordentlichen Kleinheit durch-

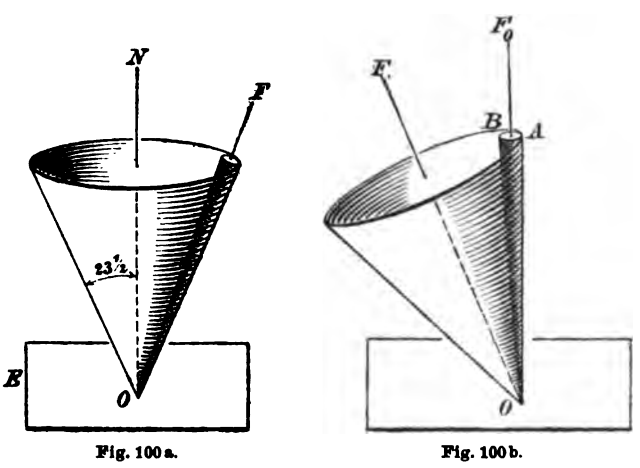



Fig. 100a. Fig. 100b.

mifst er den Mantel des Herpolhodiekegels erst in 26 000 Jahren einmal. Der Sinn des Abrollens ergibt sich aus dem Umdrehungssinne des Polhodiekegels und erfolgt in der Figur von rechts über vorn nach links, also von $N$ gesehen *im* Uhrzeigersinne.

Wir betrachten nun Fig. 100b (freie Nutation). Die Bewegung findet hier um die mittlere Lage der Figurenaxe statt (die in der Figur vertikal gezeichnete Gerade $OF_0$, im Gegensatz zu der augenblicklichen Lage der Figurenaxe $OF$). Der Winkel an der Spitze des Polhodiekegels beträgt nach Obigem $a\frac{C}{A}$, der des Herpolhodiekegels $a\frac{C-A}{A}$; das Verhältnis beider wurde gleich 305 gefunden. *Jetzt ist also der Herpolhodiekegel erheblich spitzer wie der Polhodiekegel;* auch hier konnte das zahlenmäfsige Verhältnis beider Kegel in der Figur nicht zum richtigen Ausdruck gebracht und mufste der Herpolhodiekegel verhältnismäfsig viel zu stumpf gezeichnet werden. Nach unseren Formeln hängt die absolute Gröfse der Kegelöffnungen von der Gröfse $a$ ab, über die nur die Beobachtungen Aufschlufs geben können. Wir sind also einstweilen über die wirkliche Gestalt von Polhodie- und Herpolhodiekegel im Unklaren und haben daher in Fig. 100b dem Polhodiekegel etwa diejenige Gröfse gegeben, wie sie dem Herpolhodiekegel in Fig. 100a zukommt. In Wirklichkeit wird, da die Beobachtungen

einen äufserst kleinen Wert von $a$ ergeben, auch der Polhodiekegel äufserst spitz und der Herpolhodiekegel dementsprechend noch 300 mal spitzer. Fig. 100b kann daher nur eine grobe qualitative Veranschaulichung der Verhältnisse geben. Wir müssen uns nun vorstellen, dafs der relativ weite Polhodiekegel, der den engen Herpolhodiekegel umfafst, mit der Geschwindigkeit der Erdumdrehung rotiert und dabei ohne zu gleiten auf dem Herpolhodiekegel abrollt. Der Drehsinn des Polhodiekegels ist wieder, von $F$ gesehen, dem Uhrzeigersinne *entgegengesetzt.* Daraus folgt, dafs das Abrollen, von $F_0$ aus gesehen, ebenfalls *entgegen* dem Uhrzeigersinne erfolgt. Die Berührungslinie beider Kegel stellt uns die Lage der Rotationsaxe sowohl im Raume wie in der Erde dar. *Sie läuft im Raume in etwas weniger wie einem Sterntage um.* Wenn nämlich die Berührungslinie nach einmaliger Durchmessung des Herpolhodiekegels wieder in ihre ursprüngliche Lage auf dem Herpolhodiekegel ($OA$ der Figur) zurückgekehrt ist, befindet sie sich in Deckung mit derjenigen Erzeugenden $OB$ des Polhodiekegels, die wir erhalten, indem wir den auf dem Polhodiekegel gemessenen Bogen $AB$ gleich dem Umfange des Herpolhodiekegels im Abstande $OA$ von $O$ machen. Der Strahl $OA$, als Erzeugende des Polhodiekegels betrachtet, ist infolgedessen noch nicht in seine Anfangslage zurückgekehrt; die Zeitdauer des Umlaufs der Rotationsaxe auf dem Herpolhodiekegel wird daher etwas kleiner als die Zeitdauer, in der ein Strahl des Polhodiekegels einmal umläuft, welche ihrerseits gleich einem Sterntage ist. *Auf dem Polhodiekegel andrerseits läuft die Rotationsaxe erheblich langsamer um.* Da sie nämlich während eines Sterntages um wenig mehr als das Stückchen $AB$ auf dem Polhodiekegel im Sinne der Erddrehung vorgerückt ist, dauert es eine erhebliche Anzahl von Sterntagen, bis sie den ganzen Umfang des Polhodiekegels durchmessen hat. Diese Anzahl wurde oben als Eulerscher Cyklus bezeichnet und gleich 304 gefunden. Nach der Figur in Übereinstimmung mit unseren obigen Rechnungen wird das Verhältnis zwischen der Umlaufszeit der Rotationsaxe in der Erde und derjenigen im Raume gleich dem Verhältnis des Umfanges des Polhodiekegels zu demjenigen des Herpolhodiekegels, in gleichem Abstand von der Spitze der Kegel gemessen.

In unseren Rechnungen sowohl wie in unseren Zeichnungen haben wir aus guten Gründen die Behandlung der erzwungenen Präcession von der der freien Nutation abgesondert und die erzwungenen Nutationen überhaupt bei Seite gelassen (die man ebenfalls mit Poinsotschen Vorstellungen begleiten könnte).

In Wirklichkeit findet natürlich eine Überlagerung dieser verschie-

denen Bewegungen und damit eine Überlagerung der Formeln und in gewissem Sinne eine Überlagerung der Figuren statt. Leider verliert die Poinsotsche Vorstellung der abrollenden Kegel für eine derartige zusammengesetzte Bewegung ihren Hauptvorzug, den der unmittelbaren Anschaulichkeit. Wollten wir uns nämlich Präcession und Nutation in *einer* Figur darstellen und durch *ein* Paar abrollender Kegel verwirklichen, so müfsten wir den Herpolhodiekegel mit aufserordentlich kleinen und kurzen Wellungen versehen, in welche entsprechende Wellungen des Polhodiekegels eingreifen. Für das anschauliche Verständnis des Vorganges wird hierdurch aber nichts gewonnen.

Schliefslich gehen wir im Interesse der folgenden Diskussionen von dem uns nunmehr bekannten Polhodiekegel bei der freien Nutation zu demjenigen Kreise über, den der Polhodiekegel auf der Erdoberfläche ausschneidet. Wir unterscheiden den Durchschnitt der Rotationsaxe mit der Erdoberfläche, den „instantanen Erdpol", von dem Durchschnitt der Figurenaxe mit der Erdoberfläche, dem „geometrischen Erdpol". Unser Kreis ist der geometrische Ort des instantanen Pols, sein Mittelpunkt fällt mit dem geometrischen Pole zusammen. Nach der vorangehenden Theorie müssen wir erwarten, dafs der instantane Pol den geometrischen Pol in der Periode des Eulerschen Cyklus, also etwa in 10 Monaten, einmal im Sinne der Erdrotation umkreist. Der vom Erdmittelpunkte aus gesehene Radius des Kreises beträgt nach Obigem $a\,\frac{C}{A}$.

Wir werden im folgenden Paragraphen darüber zu berichten haben, in welcher Weise sich eine derartige Bewegung des instantanen Pols in den Beobachtungen der Polschwankungen bemerklich macht. Überschlagen wir hier nur noch die Chancen der Beobachtungsmöglichkeit, so sehen wir, dafs diese jetzt viel günstiger liegen, wie vorher, wo es sich um den Nachweis der räumlichen Bewegung der Rotationsaxe handelte. Denn erstens ist die Periode der Bewegung des instantanen Pols und zweitens ist ihre Gröfse ca. 300 mal so grofs, wie die Periode und Gröfse derjenigen Bewegung, welche der Schnittpunkt der Rotationsaxe am Himmelsgewölbe ausführt. Obschon also, wie wir bemerkten, die frühere Bewegung unmerklich war, so braucht es darum nicht die jetzige zu sein.

## § 6. Der Nachweis der Polschwankungen durch die Beobachtung; die Chandlersche Periode.

In der Beobachtung werden sich die im vorigen Paragraphen als möglich nachgewiesenen Polschwankungen durch eine Veränderlichkeit

der *Breite* des Beobachtungsortes verraten. Ob man dabei die Breite als geographische (Komplement desjenigen Winkels, welchen die Lotlinie des Beobachtungsortes mit der Rotationsaxe der Erde bildet) oder als geocentrische (Komplement des Winkels, den die Verbindungslinie des Beobachtungsortes und des Erdmittelpunktes mit der Rotationsaxe einschliefst) definiert, ist gleichgültig. In beiden Fällen handelt es sich um den Winkel einer in der Erde festen Geraden mit der in der Erde variabeln Rotationsaxe. Je nachdem sich die letztere bei ihrer Bewegung dem Beobachtungsorte nähert oder sich von ihm entfernt, wird die Breite des Ortes abnehmen oder wachsen.

In der That sind nun Breitenschwankungen, welche sich nicht durch Beobachtungsfehler erklären liefsen, schon früher zu wiederholten Malen vermutet worden, so von Peters (1842) und Nyrén (1871) an der Sternwarte Pulkowa, von Clerk Maxwell an den Greenwicher Beobachtungen aus dem Jahre 1851 bis 1854. Die Amplitude der Schwankung hielt sich in den Zehnteln einer Sekunde, die Angaben über die Periode waren widersprechend. Zur Sicherheit erhoben wurde das Vorhandensein von Breitenschwankungen aber erst durch die besonders genauen Beobachtungen von Küstner an der Berliner Sternwarte aus dem Jahre 1885. Auf die sehr ausführlichen Arbeiten, in denen Chandler*) das gesamte vorliegende Beobachtungsmaterial einer eingehenden Diskussion unterzog, kommen wir unten zurück.

Neues Licht wurde auf die ganze Frage geworfen, als im Jahre 1891 eine astronomische Expedition nach Honolulu zum Zwecke von Breitenmessungen ausgeschickt wurde, welche mit gleichzeitigen Beobachtungen in Berlin verglichen wurden. Honolulu liegt ungefähr auf dem entgegengesetzten Meridian (171° westlich) von Berlin. Wenn nun die Breitenschwankungen wirklich ihren Grund in dem Wechsel der Rotationsaxe der Erde haben, so müssen sie sich an beiden Stationen in entgegengesetztem Sinne äufsern (vgl. Fig. 101): die Breite in Berlin mufs zunehmen, wenn sie in Honolulu abnimmt, ein Maximum der Breite in Berlin mufs mit einem Minimum in Honolulu zusammenfallen etc. Wie vollständig sich diese Erwartung bestätigt hat, zeigen die beiden

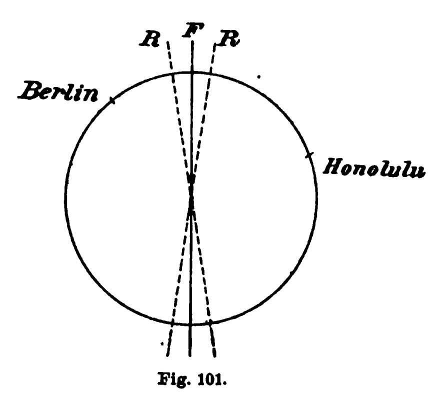


Fig. 101.

*) Astronomical Journal Vol. XI, XII, XV, XIX, XXI, XXII (1891—1902).

folgenden Diagramme*) (Fig. 102); in ihnen bedeutet die Abscisse die Zeit während der Jahre 1891 und 1892, die Ordinate giebt die Abweichung der geographischen Breite von ihrem mittleren Werte an, in einem Maſsstabe, der aus den angeschriebenen Zahlen ersichtlich ist. Die Amplitude der Schwankung ist, wie wir sehen, für beide Stationen

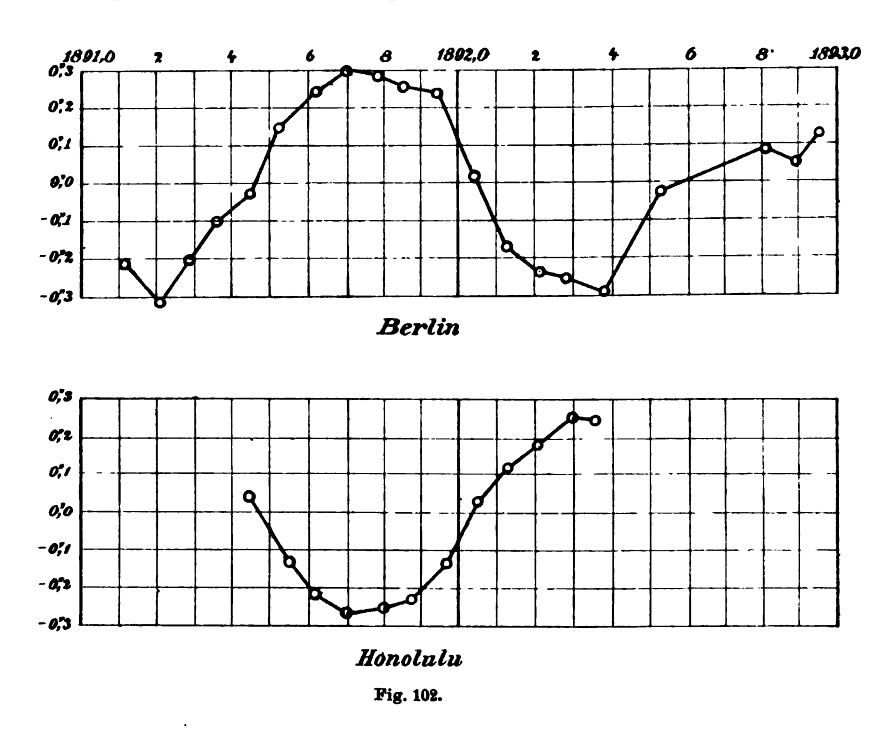



Fig. 102.

ungefähr gleich; sie liegt zwischen 0″,2 und 0″,3; vor allem aber sehen wir: *die Phase ist für beide Stationen genau entgegengesetzt.* Durch letztere Thatsache ist aufs augenfälligste dargethan, *daſs die Breitenschwankungen ihren Grund in Umlagerungen der Rotationsaxe haben, daſs also diese Axe relativ gegen den Erdkörper gewisse Bewegungen ausführt.*

Offenbar geben zwei auf entgegengesetzten Meridianen gelegene Stationen, wie Berlin und Honolulu, nur eine Komponente der Bewegung wieder, die Komponente nach der durch beide Stationen gelegten Meridianebene. Dagegen werden zur vollständigen Kenntnis der Bewegungen zwei Stationen genügen, deren Meridiane etwa einen rechten Winkel bilden. Wenn mehrere solche Stationen, insbesondere auch

*) Wir entnehmen dieselben den Verhandlungen der 1895 in Berlin abgehaltenen Konferenz der internat. Erdmessung, Berlin 1896, Tafel 4.

auf entgegengesetzten Meridianen gelegene, zur Verfügung stehen, so werden ihre Resultate sich gegenseitig kontrollieren können.

Fig. 103 stellt die Lage der Beobachtungsorte dar, auf welche sich die von der permanenten Kommission für internationale Erdmessung angeregte Festlegung der Polschwankungen stützt. Die Mehrzahl der europäischen Stationen liegt gegen die hauptsächlichen amerikanischen Stationen, vom Nordpol gesehen, ungefähr unter rechtem Winkel. Das gesamte Beobachtungsmaterial wird in Potsdam von Th. Albrecht verarbeitet und fortlaufend von dem Centralbureau der internationalen Erdmessung veröffentlicht. Dem letzten Berichte*) entnehmen wir die Figur 104, welche die Beobachtungsergebnisse von 1890 bis 1900 zusammenfaſst.

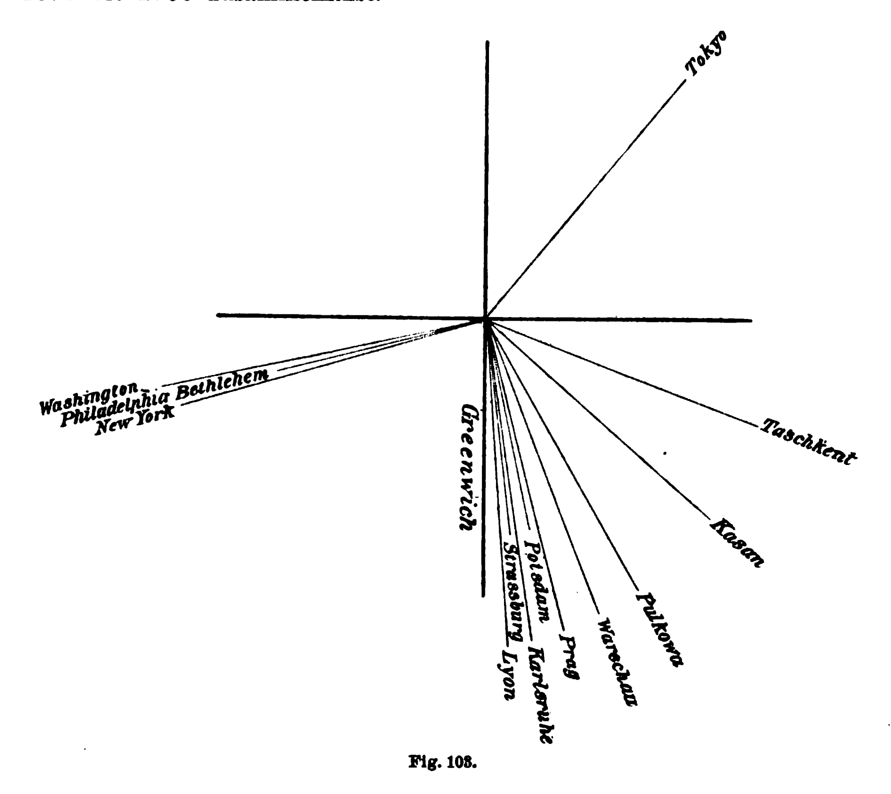



Fig. 103.

Diese Figur stellt den Weg des Poles in dem genannten Zeitraume dar u. zw. ist der Deutlichkeit der Zeichnung wegen der den

*) Berlin 1900. Frühere Mitteilungen in den Verhandlungen der genannten Kommission auf der Konferenz in Lausanne 1896. Vgl. auch für die Jahre nach 1900 Astron. Nachr. Nr. 3808

ersten fünf Jahren entsprechende Weg punktiert, der den letzten fünf Jahren entsprechende ausgezeichnet. Die eingeschriebenen Zahlen bedeuten die Daten (Jahre und Jahreszehntel), auf welche die Beobachtungen sämtlicher Stationen reduziert wurden. Der mittlere Fehler der einzelnen Koordinate des instantanen Poles wird zu 0,03″ angegeben. Dieser verhältnismäßig kleine mittlere Fehler wird aber nur dadurch erzielt, daß zur Ableitung jeder Koordinate eine große Zahl von Einzelbeobachtungen herangezogen wurde, die selbst einen viel größeren mittleren Fehler haben. Der Ursprung des benutzten Koordinatensystems entspricht der mittleren Lage des instantanen Poles oder wie wir auch sagen können, dem geometrischen Pol.

**Bewegung des Nordpoles der Erdaxe.**

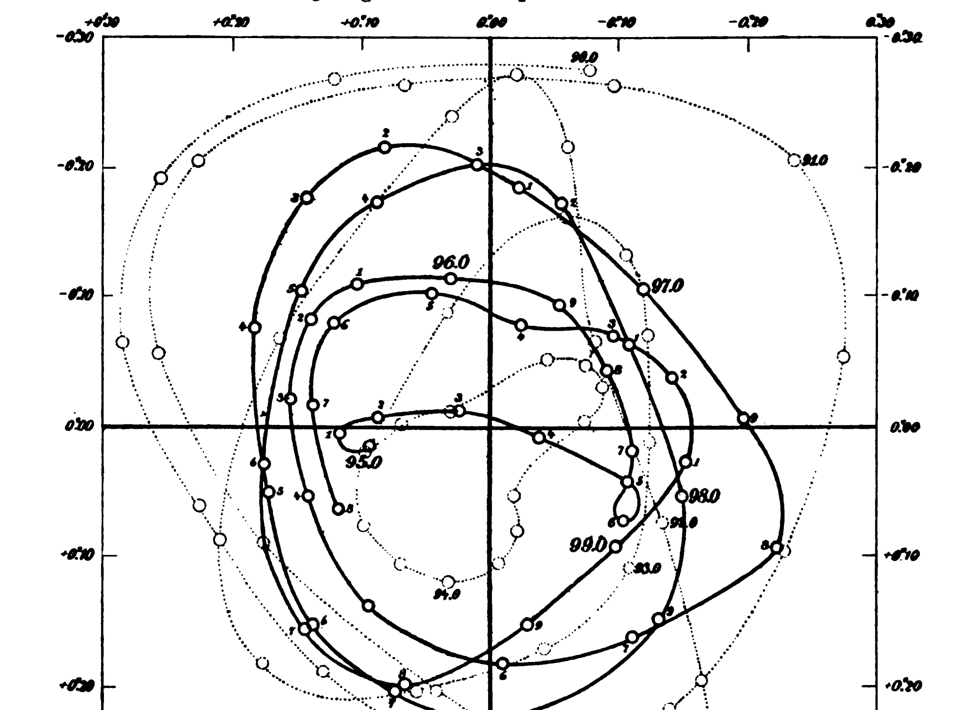



Fig. 104.

Vergleichen wir nun diese Figur mit der vorangehenden Theorie der Polschwankungen.

Da fällt zunächst ins Auge, dafs die Polbahn keinem einfachen mathematischen Gesetze mit Genauigkeit genügt, dafs sie einen scheinbar zufälligen Charakter hat und vielfach gestört ist. Es sind bei der vorliegenden Frage offenbar nicht mehr die einfachen Verhältnisse der Himmelsmechanik mafsgebend, sondern wir befinden uns hier bereits auf dem verschlungenen Gebiete der Geophysik. Nach der abstrakten Theorie des vorigen Paragraphen sollte die Bahnkurve ein *Kreis* sein; davon ist in Wirklichkeit nicht die Rede; nur zu Beginn des Beobachtungszeitraumes wird die Kreisgestalt einigermafsen approximiert. In der That werden wir bald eine Reihe unberechenbarer Störungen kennen lernen, welche die Polbewegung beeinflussen und von ihrer theoretischen Gesetzmäfsigkeit entfernen.

Dagegen ist zu betonen, dafs der *Sinn der Polbewegung* durchweg mit dem von der Theorie geforderten Sinne der Erdumdrehung übereinstimmt, wenn wir eine vorübergehende Unregelmäfsigkeit ausnehmen, die von 95,0 bis 95,6 reicht. Hier hat entweder eine jener später zu besprechenden temporären Störungen stattgefunden, in einem solchen Grade, dafs durch dieselbe der Polweg in der Figur über den Koordinatenursprung hinübergezogen ist, oder aber die Schleife als solche ist auf Beobachtungsfehler zurückzuführen, was ebenfalls keineswegs ausgeschlossen ist, da schon eine Korrektion der Koordinaten um etwa den angegebenen mittleren Fehler genügt, um die ganze Unregelmäfsigkeit fortzuschaffen.

Was nun die *Amplitude der Polschwankung*, d. h. den Radiusvektor der Polbahn betrifft, so beträgt dieselbe in Gradmafs im Maximum etwa $1/4''$, im Mittel vielleicht $1/8''$. Die in den Formeln des vorigen Paragraphen unbestimmt gebliebene Gröfse $a$ würde hiernach im Mittel etwa gleich $1/8''$ zu setzen sein. Auf der Erdoberfläche ergiebt sich hieraus als mittlere Entfernung $e$ des geometrischen und des instantanen Poles etwa:

$$e = a \times \text{Erdradius} = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{\pi} 10^7 = \text{circa } 4 \text{ m}.$$

In den Jahren 1890 bis 1895 hat diese mittlere Entfernung durchschnittlich abgenommen, von 1895 bis 1898 hat sie zugenommen, von da ab ist sie kleiner geworden, ist aber jetzt (1902) bereits wieder in's Zunehmen übergegangen, wie aus der unsere Figur ergänzenden Publikation in den Astron. Nachr. hervorgeht (vgl. die vorige Anm.).

Das Hauptinteresse konzentriert sich indessen auf die Frage nach der *Periode der Polbewegung*. Hier zeigt sich eine zunächst überraschende Abweichung von der Theorie, die um so bemerkenswerter ist, als sie durchaus gesetzmäfsig zu sein scheint. Während nämlich die Theorie

eine Periode von ungefähr 10 Monaten verlangt, ergiebt die Prüfung von Figur 104 eine Periode von etwa 14 Monaten. Wir verfahren, um dies einzusehen, ziemlich roh, aber für unsere Zwecke hinreichend genau wie folgt: Wir denken uns zunächst die offenbar unregelmäfsige Schlinge von 95,0 bis 95,6 nach unten hin auseinandergezogen, so dafs sie mit den anliegenden Kurvenstücken einen dem Uhrzeigersinne entgegengesetzten Umlauf des Koordinatenanfanges gleich den übrigen Umläufen ergiebt und zählen darauf von 90,0 bis etwa 99,4 die Anzahl der Umläufe ab. Es sind dies gerade 8 Umläufe, welche vom Pole in 9,4 Jahren zurückgelegt sind. Mithin beträgt die Dauer eines Umlaufes oder die Periode der Polschwankung

$$\frac{9{,}4}{8} \cdot 12 = 14{,}1 \text{ Monate.}$$

*Während wir also die Eulersche zehnmonatliche Periode vorzufinden erwarteten, werden wir durch die Beobachtungen auf eine wesentlich längere Periode hingewiesen.*

Das Verdienst, die hier hervorgetretene längere Periode entdeckt zu haben, gebührt dem amerikanischen Astronomen Chandler. Chandler prüfte in den schon zitierten umfangreichen Arbeiten rein rechnerisch ohne theoretische Voreingenommenheit das gesamte Beobachtungsmaterial der Breitenschwankungen von 1840 bis 1891 und wurde dabei auf eine Periode von 427 Tagen = ca. 14 Monaten geführt, eine Periode, welche seitdem im Gegensatz zur *Eulerschen* die *Chandlersche* heifst.

Ohne zunächst auf die theoretische Erklärung dieser Periode einzugehen, wünschen wir uns durch blofse Diskussion der in Fig. 104 niedergelegten Beobachtungen ein Bild davon zu verschaffen, wieweit die Polschwankungen durch die Annahme einer 14-monatlichen Periode dargestellt werden können. Wir werden dabei nicht das äufserst mühsame und gründliche rechnerische Verfahren von Chandler benutzen, sondern ein naheliegendes graphisches Verfahren.

Es sei $w = x + iy$ der Vektor vom Koordinatenursprung nach dem augenblicklichen Orte des instantanen Poles. Würde die Bewegung des Poles vollständig durch *eine* Periode $\tau_1$ (z. B. = 14 Monate) erschöpft, so könnten wir einfach schreiben

$$w = a e^{2\pi i \frac{t}{\tau_1}} + a' e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_1}}; \tag{1}$$

wäre die Bewegung überdies eine reine Kreisbewegung, so würde von den beiden Konstanten $a$ und $a'$ die eine (sagen wir $a'$) verschwinden; gleichzeitig würde dann die andere $a$ durch ihren absoluten Betrag den Radius des Kreises bestimmen, auf dem die Bewegung stattfindet.

Wir können aber sogleich, den Fall einer allgemeinen elliptischen Polschwingung in Betracht ziehend, $a$ sowohl wie $a'$ als im allgemeinen nicht verschwindende komplexe Gröfsen voraussetzen.

Die Kompliziertheit der Figur 104 zeigt unmittelbar, dafs diese Darstellung durch *eine* Periode nicht ausreicht. Wir machen daher den allgemeineren Ansatz

$$(2) \qquad w = ae^{2\pi i \frac{t}{\tau_1}} + a'e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_1}} + be^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + b'e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \cdots,$$

indem wir versuchen, die wirklich beobachtete Bewegung durch Überlagerung zweier (oder mehrerer) Schwingungsbewegungen darzustellen. Es ist sehr leicht, den Bestandteil von der bereits bekannten 14-monatlichen Periode aus der Polbewegung zu eliminieren. Wir bilden zu dem Zwecke nach Gl. (2)

$$\begin{aligned} w_{t+\tau_1} - w_t &= b\left(e^{2\pi i \frac{t+\tau_1}{\tau_2}} - e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}}\right) + b'\left(e^{-2\pi i \frac{t+\tau_1}{\tau_2}} - e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}}\right) + \cdots \\ &= b\left(e^{2\pi i \frac{\tau_1}{\tau_2}} - 1\right) e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + b'\left(e^{-2\pi i \frac{\tau_1}{\tau_2}} - 1\right) e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \cdots \\ &= ce^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + c'e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \cdots, \end{aligned}$$

wo $c$ und $c'$ ebenso wie vorher $b$ und $b'$ unbekannte komplexe Konstante bedeuten. Wenn also in der Polbewegung aufser $\tau_1$ noch eine weitere Periode $\tau_2$ steckt, so mufs sich diese in der von der hauptsächlichen Periode $\tau_1$ befreiten Differenz $w_{t+\tau_1} - w_t$ gerade so ausprägen, wie die Periode $\tau_1$ in $w$ selbst.

Am einfachsten bestimmt man die Differenz $w_{t+\tau_1} - w_t$ durch die folgende *graphische Konstruktion**) an der Polbahn Fig. 104. Es ist $\tau_1 = 14$ Monate $= 1{,}17$ Jahre. Man vergleiche also z. B. den Ort des Poles für den Zeitpunkt 90,0 mit demjenigen für den Zeitpunkt 91,17. Die Verbindungslinie beider Orte giebt uns nach Gröfse, Richtung und Sinn den Vektor $w_{t+\tau_1} - w_t$ für $t = 90{,}0$. Es ist also nur nötig, diese Strecke etwa durch Parallelenlineale aus Fig. 104 in eine neue Figur (105a) zu übertragen. Wir erhalten so einen vom Koordinatenursprung dieser neuen Figur auslaufenden Vektor, von dem nur der Endpunkt markiert und durch die Zahl 90,0 bezeichnet ist. In gleicher Weise

*) Dieses graphische Verfahren dürfte neu und für manche ähnlichen Fälle nützlich sein. Vgl. auch, was die analytischen Regeln zur Auffindung „versteckter Periodizitäten" angeht, den Bericht von H. Burkhardt: Entwickelungen nach oscillierenden Funktionen. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 10 (1901), pag. 312—332. Neuerdings hat A. Schuster eine allgemeine Methode (Konstruktion eines sog. „Periodographen") angegeben, durch welche die Frage entscheidend gefördert werden dürfte. Vgl. Nature, Bd. 66 (1902), pag. 614—618.

verfahren wir mit den beiden Orten 90,1 und 91,27 in Fig. 104 und erhalten dadurch in Fig. 105a einen Punkt, der der Differenz $w_{t+\tau_1} - w_t$ für $t = 90{,}1$ entspricht und mit 1 bezeichnet ist. So fortfahrend leiten wir aus der Polbahn in Fig. 104 eine neue Polbahn ab, die von dem Hauptgliede der Bewegung befreit ist. Diese abgeleitete Polbahn wird, wie man sieht, noch viel verschlungener und unregelmäfsiger als die ursprüngliche. Es mufste daher, sollte die Figur nicht zu undeutlich werden, die abgeleitete Polbahn in zwei Stücke getrennt werden: Fig. 105a giebt den Zeitraum von 90,0 bis 94,0, Fig. 105b den Zeitraum von 94,0 bis 98,0 wieder. Im Ganzen sind somit bei der abgeleiteten Polbahn die Orte zwischen 90,0 und 99,17 verwandt worden.

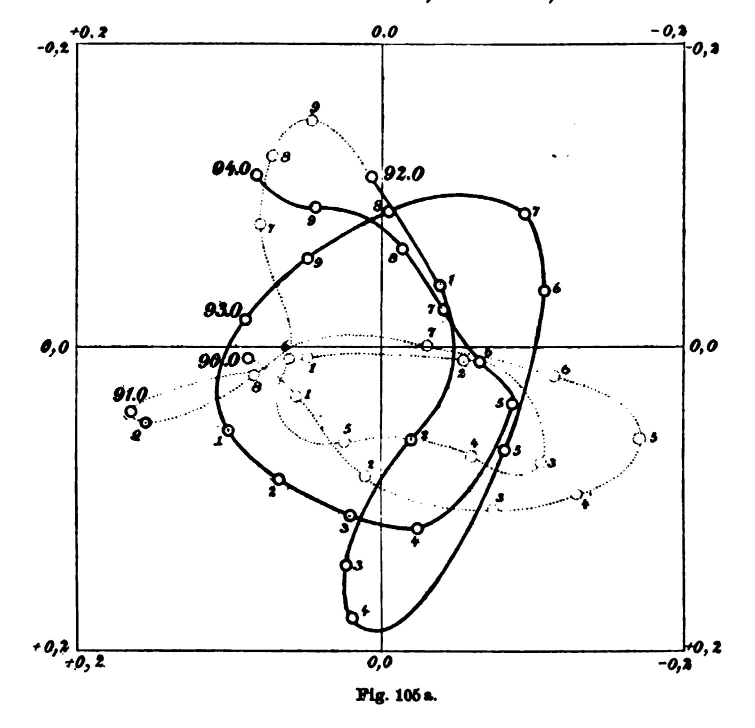



Fig. 105a.

Der Deutlichkeit wegen wurde in beiden Figuren die Hälfte der abgeleiteten Polbahn punktiert, die andere Hälfte ausgezogen.

Zunächst lehrt der Anblick der abgeleiteten Polbahnen, dafs ihre Abmessungen kleiner sind, wie die der ursprünglichen Figur. Während die Ausschläge in Fig. 104 bis nahezu an 0″,30 heranreichen, überschreiten die Ausschläge in den Fig. 105 nur an wenigen Stellen 0″, 15. Dies Resultat ist keineswegs selbstverständlich, da sich ja bei der Differenzbildung zwischen $w_{t+\tau_1}$ und $w_t$ die Gröfse der Ausschläge ebensogut vermehren wie vermindern konnte.

*Wir schliefsen hieraus, dafs in der That eine Periode von 14 Monaten in den Polschwankungen ausgeprägt ist und dafs etwa die Hälfte der im Ganzen beobachteten Schwankungen auf eine Bewegung von dieser Periode zurückzuführen ist.*

Weiter aber schliefsen wir aus der schon erwähnten gröfseren Verschlungenheit der neuen Figuren, *dafs die Umstände, welche den nach Abzug der 14-monatlichen Periode verbleibenden Restbetrag der Polschwankungen bedingen, weniger gesetzmäfsig und einfach sind, wie diejenigen, welche den Charakter und die Periode der Hauptbewegung bestimmen.* Betrachtet man insbesondere z. B. den Zeitraum von 96,5 bis 97,5 in Fig. 105b, so wird man den Eindruck gewinnen, als ob

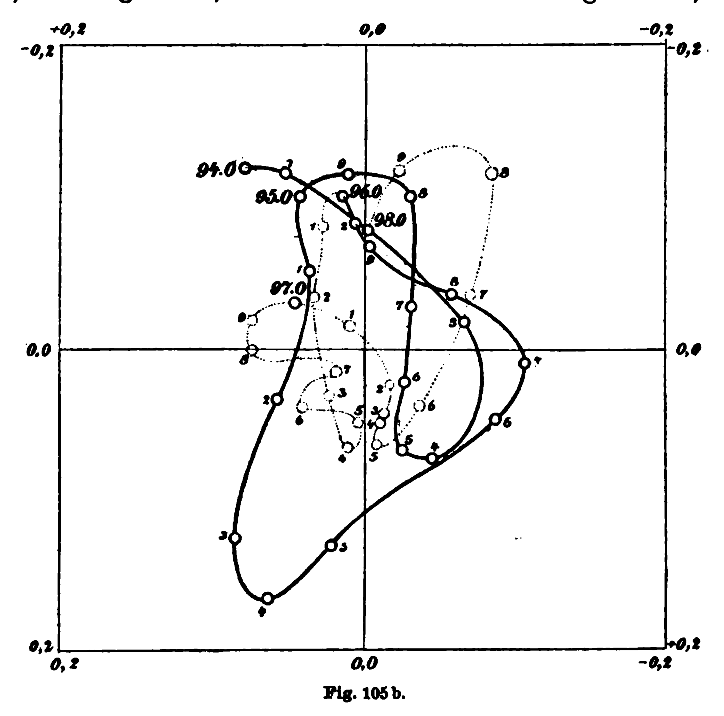



Fig. 105 b.

das Zickzack dieses Bahnstückes regellos verläuft, und wird den Verdacht hegen, dafs es möglicherweise ganz auf Beobachtungsfehler zurückzuführen ist. Es kommt hinzu, dafs der mittlere Fehler der abgeleiteten Polbahn bei unserer Konstruktion noch etwas gröfser ausfällt, wie der der ursprünglichen Bahn (0″,03), dafs also bei der abgeleiteten Polbahn die Lage der Punkte nur etwa auf 0″,05 bestimmt ist.

Indessen läfst sich eine gewisse Gesetzmäfsigkeit auch bei der abgeleiteten Polbahn nicht verkennen. Es fällt auf, dafs in beiden

Figuren 105 die mit gleichen Zahlen bezeichneten Punkte in der Regel ziemlich dicht bei einander liegen. So befinden sich z. B. die vollen Jahreszahlen sämtlich in dem linken oberen Quadranten der Figuren oder in unmittelbarer Nähe desselben. Um dies noch deutlicher zu machen, könnte man sich in der Fig. 105 die verschiedenen Polygone der Jahreszehntel eintragen, indem man die mit gleichen Ziffern 1, 2, ... bezeichneten Orte des Poles in den verschiedenen Jahren geradlinig verbindet. Alle diese Polygone würden verhältnismäfsig klein ausfallen. Nach Ablauf eines Jahres kommt also der „abgeleitete" Pol im Grofsen und Ganzen in seine frühere Lage zurück. *In der abgeleiteten Polbahn scheint sich hiernach die Periode eines vollen Jahres auszuprägen.*

Versuchen wir ebenso wie oben bei der 14-monatlichen Periode durch Abzählung der Umläufe das Vorhandensein der jährlichen Periode wahrscheinlich zu machen, so müssen wir in erhöhtem Mafse von der schon dort angewandten Willkür Gebrauch machen, einzelne Schleifen über den Koordinatenursprung herüberzuziehen, um dadurch die Kurve abzuglätten. Betrachten wir z. B. den ausgezogenen Teil beider Figuren von 92,0 bis 96,0, der die verhältnismäfsig deutlichsten Elongationen aufweist. Wir denken uns den Zug von 92,0 bis 92,4 nach links hin über den Mittelpunkt der Figur herübergezogen. Dieser Zug ergiebt dann zusammen mit dem Stücke 92,4 bis 92,8 einen ersten Umlauf des Koordinatenursprungs; einen zweiten ziemlich regelmäfsigen Umlauf haben wir in der Bahn von 92,8 bis 93,8. Indem wir auf die andere Figur übergehen, denken wir uns die Schlinge von 94,0 bis 94,5 nach unten links herabgezogen; alsdann können wir bis 94,9 einen dritten Umlauf zählen. Einen vierten vollen Umlauf liefert die die Zeit von 94,9 bis 96,0. Im ganzen haben wir also, wenn wir die vorgenommenen willkürlichen Verschiebungen der Bahn gelten lassen, in vier Jahren gerade vier Umläufe, also eine jährliche Periodizität der abgeleiteten Bahn.

Dieses Ergebnis ist ebenfalls bereits von Chandler auf Grund seiner rechnerischen Reduktion der Beobachtungen ausgesprochen worden. Auf ähnlicher Grundlage hat später van de Sande Bakhuyzen*) den jährlichen Bestandteil der Polbewegung formelmäfsig darzustellen gesucht. Er findet dabei nach Abzug der 14-monatlichen Polschwankung als mittlere jährliche Polbahn eine Ellipse, deren grofse Axe gleich 0",104 ist und gegen den 19ten Meridian östlich von Greenwich gerichtet ist und deren kleine Axe 0",044 beträgt. Dieselbe wird, wie auch aus den

*) Akademie von Wetenschappen, Amsterdam, August 1900.

Figuren 105 zu ersehen ist, in der Richtung von Westen nach Osten durchlaufen; den 19ten Meridian passiert der Pol Anfang Oktober.

Es liegt nahe, unser Verfahren zu wiederholen und aus den Figuren 105 durch Elimination der jährlichen Periode eine neue Figur abzuleiten. Bedeutet also jetzt $w$ den in Fig. 105 dargestellten Vektor und $\tau_2$ die Periode eines Jahres, so bilden wir uns auf graphischem Wege wie oben $w_{t+\tau_2} - w_t$ und tragen das Resultat in einer neuen Figur ein. Es wurden dabei nur die ausgezogenen Teile der Figuren 105 (von 92,0 bis 96,0) der weiteren Behandlung zu Grunde gelegt, so dafs die neu entstehende Figur 106 von den Marken 92,0 bis 95,0 reicht, wobei wieder die Hälfte der Figur (von 92,0 bis 93,5) ausgezogen, die andere Hälfte (von 93,5 bis 95,0) punktiert wurde. Wäre eine weitere Periode aufser $\tau_1$ und $\tau_2$ in der Polbewegung enthalten, so müfste diese in unserer Fig. 106 zur Anschauung kommen. Es scheint aber nicht, dafs dem so ist; *vielmehr macht Fig. 106 den Eindruck, als ob es sich hier um einzelne Störungen handelt, die entsprechende einmalige Vorstöfse der Bahn bedingen, und die von einem Zurückweichen in die Ruhelage gefolgt sind.* Einen solchen Vorstofs haben wir in der Figur bei 92,1, einen zweiten bei 93,2 u. s. w. Wie der Vergleich der Figuren 105 und 106 zeigt, ist eine wesentliche Verkleinerung der Dimensionen durch unser zweites Verfahren nicht mehr eingetreten. Die Realität der 12-monatlichen Periode wird also durch die Gröfse unserer Figuren nicht in dem Sinne verdeutlicht, wie vorher die Realität der 14-monatlichen Periode. *Wir müssen daraus schliefsen, dafs die Störungen, welche in Fig. 106 zur Anschauung kommen, etwa von derselben Gröfsenordnung sind, wie die Einflüsse, welche den vorausgesetzten jährlichen Umlauf des Poles bedingen.* Jedenfalls bleibt in der Polbewegung ein erheblicher Restbetrag übrig, welcher weder durch eine 14-monatliche noch durch eine 12-monatliche Schwankung er-

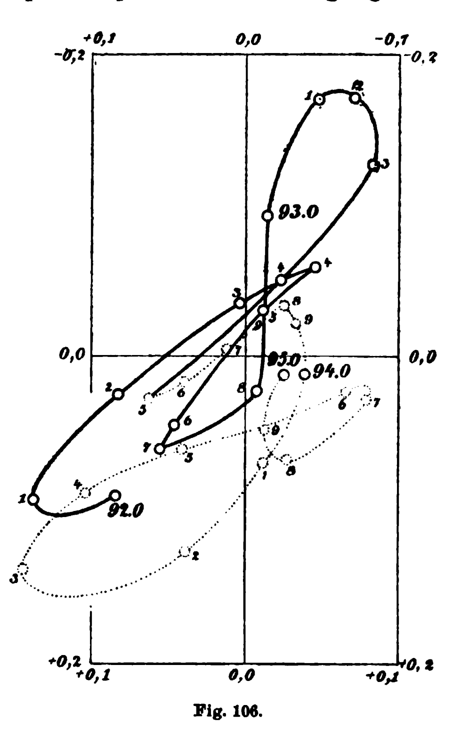


Fig. 106.

klärt wird. Von der 10-monatlichen Eulerschen Schwankung ist überhaupt nichts zu bemerken.

Es ist nicht unmöglich, dafs die hier auf graphischem Wege gezogenen Schlüsse teilweise voreilig sind und dafs sie beim Bekanntwerden weiterer Beobachtungen über Polschwankungen zu modifizieren sein werden. Namentlich mufs die letzte Figur wegen der bei der Wiederholung unseres graphischen Verfahrens sich häufenden Unsicherheiten als ziemlich problematisch gelten. Auch liegt in unserem Ableitungsverfahren eine gewisse Willkür, insofern als wir nicht notwendig die Vektoren $w_t$ und $w_{t+\tau}$ zu vergleichen brauchten, sondern ebensogut die Differenz zwischen $w_{t+2\tau}$ oder $w_{t+3\tau}$ ... und $w_t$ hätten nehmen können. Die abgeleiteten Figuren würden dann andere geworden sein. Indessen stimmen unsere Ergebnisse mit den rechnerischen Resultaten von Chandler u. A. überein; jedenfalls scheint unser Verfahren für die hier beabsichtigte mehr orientierende wie abschliefsende Diskussion bei der heutigen Genauigkeit der fraglichen Beobachtungen auszureichen. Bei einer abschliefsenden Beurteilung des Gegenstandes werden namentlich auch Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen darüber, ob eine aufgefundene Periodizität als wirklich oder zufällig anzusehen ist, im Sinne von A. Schuster (vgl. die Anm. auf pag. 679) herangezogen werden müssen.

Was insbesondere das Hauptergebnis dieser Betrachtungen, die 14-monatliche Chandlersche Periode betrifft, so scheint diese auch noch eine gewisse Stütze durch die Erscheinungen der Ebbe und Flut zu finden. Es ist klar, dafs eine Umlagerung der Rotationsaxe wegen der veränderten Centrifugalverhältnisse der Erde die Bewegung der Oceane beeinflussen mufs und dafs eine periodische Umlagerung der Rotationsaxe eine Schwankung des mittleren Meeresniveaus von derselben Periode zur Folge haben müfste, vorausgesetzt, dafs der Einflufs auf letztere genügend stark ist. Die Herren van de Sande Bakhuyzen*) und Christie**) glauben diese Voraussetzung bejahen und in den holländischen bez. amerikanischen Flutbeobachtungen eine 14-monatliche Variabilität von einigen cm. nachweisen zu können.

Zusammenfassend schliefsen wir also aus den mitgeteilten Beobachtungen namentlich zweierlei: erstens dafs Polschwankungen zweifellos konstatiert sind, dafs also der Erdpol nicht mehr als „der ruhende Pol in der Erscheinungen Flucht“ angesehen werden kann, zweitens, dafs die Polschwankungen nicht diejenige einfache Gesetzmäfsigkeit

*) Astronom. Nachr. Nr. 3261.

**) Bulletin of the Phil. Soc. of Washington 1895, vol. XII, p. 103.

und namentlich nicht diejenige Periode haben, die wir nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen erwartet haben würden.

## § 7. Die Erklärung der Chandlerschen vierzehnmonatlichen Periode und die Elastizität der Erde.

Bekanntlich darf die alte Streitfrage, ob das Erdinnere feuerflüssig oder fest sei, heutzutage als in dem Sinne entschieden gelten, daſs sich das Erdinnere, im grofsen und ganzen genommen, wie ein *fester Körper* verhält. Man wird dabei, damit es sich nicht um einen bloſsen Streit um Worte handelt, die Benennungen flüssig und fest zu definieren haben und wird sagen: flüssig soll ein Mittel heiſsen, in dessen Innerem unter gegebenen Umständen relative Verschiebungen der Teile in merklichem Maſse vorkommen können, fest ein Mittel, in dem solche Verschiebungen unmöglich sind. Man kann es dahingestellt sein lassen, ob im letzteren Falle die Verschiebbarkeit der Teile durch eine Art elastischen Zusammenhaltes, (durch Festigkeit im gewöhnlichen Sinne), oder durch einen besonders hohen Grad von Viscosität hervorgerufen wird: auch eine Flüssigkeit von hinreichender Viscosität (z. B. Asphalt) verhält sich gegen äuſsere Einwirkungen von nicht zu langer Dauer merklich wie ein fester Körper und zeigt keine bedeutenden Verschiebungen ihrer Teile gegeneinander. Wir können im Anschluſs an eine in der englischen Litteratur gebräuchliche Ausdrucksweise von *effektiver Festigkeit* sprechen, um damit ein Verhalten zu bezeichnen, welches unter gegebenen Umständen dem eines festen Körpers von bestimmtem Elastizitätsgrade analog ist.

Dagegen soll mit der Angabe, das Erdinnere sei fest, nichts über seinen sonstigen physikalischen Zustand ausgesagt werden. Dieser dürfte bei den auſserordentlichen Temperaturen und Drucken, die im Innern der Erde herrschen, von allem abweichen, was wir sonst von flüssiger oder fester Konstitution wissen. Schon in Laboratoriumsversuchen lassen sich gewisse kritische Zustände schaffen, bei denen die Aggregatzustände stetig ineinander übergehen; der Zustand des Erdinneren liegt aber weit jenseits jener kritischen Grenzen. Der richtige Standpunkt wird offenbar der sein, den Zustand des Erdinneren nicht nach gewagten Analogien und Extrapolationen aus Laboratoriumsversuchen vorauszusagen, sondern aus dem thatsächlichen Verhalten der Erde, wie es sich z. B. bei den Polschwankungen zeigt, auf den durchschnittlichen oder effektiven Zustand zurückzuschlieſsen.

Auch soll mit der Berechnung eines bestimmten Elastizitätsmoduls nicht behauptet werden, daſs die Erde durch und durch die Beschaffenheit eines Körpers von der betr. Elastizität habe. Vielmehr kann man

als die heutzutage wahrscheinlichste und herrschende Ansicht diejenige bezeichnen, wonach die Erde *inhomogen* konstituiert ist, nämlich aus einem dichteren und festeren Kern (Eisenkern) und einer weniger dichten und nachgiebigeren Schale (Gesteinsmantel) besteht, welche beide durch eine nicht sehr ausgedehnte Schicht eines zähflüssigen Magmas von einander getrennt werden (vgl. die unten zu nennende Theorie von E. Wiechert). Auch die Möglichkeit einer solchen Inhomogenität wünschen wir durch das Wort „effektive" Elastizität oder Festigkeit einzuschließen. Der zu berechnende Elastizitätsmodul bedeutet alsdann den Wert desselben für einen homogenen elastischen Körper, welcher sich hinsichtlich der hier in Frage kommenden elastischen Wirkungen ebenso verhält wie die wahrscheinlich inhomogene Erde.

Wir beabsichtigen nicht, auf die Diskussionen über das Erdinnere näher einzugehen, sondern heben nur einige Punkte aus der historischen Entwickelung hervor*). Im Interesse der Theorie des Vulkanismus haben die Geologen seit altersher für das feuerflüssige Erdinnere plaidiert. Der erste, der sich mit wissenschaftlichen Gründen dagegen ausgesprochen hat, scheint Hopkins**) gewesen zu sein. Hopkins untersuchte die Präcession und Nutation, die eine mit Flüssigkeit gefüllte Kugelschale zeigen würde, und fand, daſs eine solche sich erheblich anders als die Erde verhalten würde. Die späteren und tiefer gehenden Untersuchungen Lord Kelvins***) ergaben, daſs die Beweisführung von Hopkins mangelhaft war und daſs auch seine Resultate in wesentlichen Punkten zu berichtigen sind. Indem Kelvin statt der Kugelschale eine abgeplattete ellipsoidische Schale betrachtet, zeigt er, daſs sich *bei völlig starrer Schale* in den schnelleren Nutationen (der halbjährigen und namentlich der halbmonatlichen vgl. pag. 651), nicht aber in der Präcession und in der $18^2/_3$-jährigen Nutation eine Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung ergeben würde†), daſs dagegen bei

*) Wegen näherer Angaben vgl. die Darstellung in Kap. 15 des vorzüglichen populär-wissenschaftlichen Werkes von G. H. Darwin, The Tides, London 1898, deutsche Ausgabe von A. Pockels, Leipzig 1902, oder die jüngst erschienene Kosmische Physik von Sw. Arrhenius, Leipzig 1903.

**) Researches in physical geology, Philosophical Transactions London R. Soc. 1839, 1840, 1842.

***) Mathematical and Physical Papers, Bd. 3, art. 45 vgl. insbesondere §§ 21—38, zusammengefaſst in Popular Lectures, Bd. 3, pag. 238.

†) Hiermit hängt eine Bemerkung Lord Kelvins zusammen, die wir an Modellen der Göttinger mathematischen Sammlung bestätigt haben: Ein Kreisel, dessen Schwungmasse durch ein mit Flüssigkeit gefülltes *abgeplattetes* Rotationsellipsoid ersetzt ist, verhält sich, in Umdrehung um seine Axe versetzt, auf horizontaler Unterlage *stabil* und führt seine Präcessionsbewegung aus, ähnlich

einer *einigermaſsen nachgiebigen Schale* alle jene Erscheinungen so verlaufen könnten, wie es der Wirklichkeit entspricht. Die astronomischen Thatsachen widerlegen also nur die Annahme: flüssiges Erdinnere in starrer Schale, eine Annahme, die ja auch aus physikalischen Gründen unhaltbar ist, da wir kein Material kennen, das als dünne Schale ausgebildet völlig unnachgiebig wäre. Andrerseits aber wird die Annahme: flüssiges Erdinnere in nachgiebiger Schale, durch die Erscheinungen der Ebbe und Flut widerlegt. Eine dünne Erdkruste von der elastischen Nachgiebigkeit der uns bekannten Materialien würde nämlich dem deformierenden Einfluſs der Gezeitenkräfte fast ebenso willig folgen wie das Wasser der Meere. Dann aber gäbe es unter dem Einfluſs jener Kräfte keine relative Bewegung des Wassers gegen das Land, sondern nur ein gemeinsames Auf- und Abwogen der Meere und Kontinente, das sich der unmittelbaren Wahrnehmung entziehen würde. Somit bleibt nur die Annahme einer im Durchschnitt effektiv-festen Erde übrig (fest im Sinne der vorausgeschickten Erklärung). Mit dieser Annahme ist das Vorhandensein peripherischer Hohlräume, die mit einer Art Flüssigkeitsmagma ausgefüllt sind, oder auch das Vorhandensein einer ringsum ausgebildeten flüssigen Schicht durchaus verträglich, falls dieselben nur im Verhältnis zu dem effektiv-festen Erdkerne und der festen Erdkruste wenig ausgedehnt sind, wodurch nicht nur den Bedürfnissen der geologischen Theorien, sondern namentlich auch den wichtigen Ergebnissen der Pendelbeobachtungen Rechnung getragen werden kann. (Vgl. auch hierzu die Wiechertsche Theorie des Erdinnern.)

Daſs die Erde zugleich effektiv starr sei, soll damit nicht behauptet werden. Schon Lord Kelvin*) hat versucht, den Grad der elastischen Nachgiebigkeit des Erdkörpers auf Grund der thatsächlichen Höhe der Fluten abzuschätzen. Während, wie wir soeben sagten, bei einer in der Hauptsache flüssigen, also völlig nachgiebigen Erde die Fluthöhe sich auf Null reduzieren müſste, wird bei jedem endlichen Grade von elastischer Nachgiebigkeit die Fluthöhe einen gewissen Bruchteil derjenigen Höhe betragen, die sich auf einer völlig starren Erde ausbilden müſste.

---

wie ein Kreisel aus festem Stoff; (über den Verlauf der kürzeren Nutationen geben die Beobachtungen an unserem Modell keinen deutlichen Aufschluſs). Dagegen erweist sich ein Kreisel, dessen Schwungmasse aus einem mit Flüssigkeit gefüllten *verlängerten* Ellipsoid besteht, unter denselben Verhältnissen als gänzlich *labil.* Da die Erde ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ist, so versteht man, daſs sie in ihren Präcessionsbewegungen von denen eines durchaus festen Körpers auch dann nicht wesentlich abweichen würde, wenn sie mit Flüssigkeit gefüllt wäre, vorausgesetzt, daſs die Erdkruste, so wie wir es ohne merklichen Fehler von unserem Modell voraussetzen dürfen, absolut starr wäre.

*) Thomson und Tait, Natural Philosophy II, art. 843.

Kelvin schätzt von hier aus die Nachgiebigkeit der Erde kleiner als diejenige des Glases und etwa gleich derjenigen des Stahles. Einen sehr viel schärferen Anhalt für eine derartige Schätzung werden wir im Folgenden kennen lernen, wo wir uns zur Erklärung der Chandlerschen Periode wenden.

Es ist das Verdienst von S. Newcomb*), erkannt zu haben, dafs die Periode der freien Nutationen mit dem Grade der Nachgiebigkeit des Erdkörpers zusammenhängt. Die Eulersche Periode von 10 Monaten entspricht der Annahme völliger Starrheit; zu jedem endlichen Elastizitätsgrade dagegen berechnet sich eine davon verschiedene und zwar längere Periode. Umgekehrt läfst sich der Chandlerschen Periode ein bestimmter Elastizitätsgrad zuordnen, bei welcher die Periode der freien Nutationen gerade die beobachtete Dauer von 14 Monaten annehmen würde.

In der Litteratur sind diese Verhältnisse am gründlichsten in einer Arbeit von S. S. Hough**) untersucht, der von den elastischen Differentialgleichungen eines rotierenden Sphäroids ausgeht. Wir werden die Resultate von Hough auf sehr viel einfacherem Wege gewinnen, indem wir an einen Satz aus Kap. VII, § 8 (pag. 607) anknüpfen. Dort wurde bereits die Dauer der freien Nutation oder, was dasselbe bedeutet, die Periode der kräftefreien Präcession für einen deformirbaren sphäroidischen Kreisel berechnet, unter der Annahme, dafs lediglich die elastischen Widerstände den durch die Centrifugalwirkung der Umdrehung verursachten Formänderungen entgegenwirken. Diese Annahme trifft bei einem Körper von den Dimensionen der Erde nicht zu, weil hier auch die gegenseitigen Gravitationswirkungen der Teilchen wesentlich zu berücksichtigen sind.

Wir müssen daher Einiges über diese Gravitationswirkungen und über die Art, wie sie sich mit der Wirkung der elastischen Kräfte zusammensetzen, vorausschicken. Wir ordnen die folgenden Erörterungen in eine Reihe von Einzelproblemen.

*Erstes Problem.* Eine homogene, incompressible Flüssigkeitsmasse steht unter dem Einflufs der gegenseitigen Gravitation ihrer Teile und würde im Ruhezustande eine Kugel vom Radius $R$ bilden; sie wird in Rotation um eine feste Axe versetzt; die Winkelgeschwindigkeit

*) On the dynamics of the Earth's rotation with respect to the periodic variations of Latitude. Monthly Notices Astr. Soc. London (1892), Bd. 52, pag. 336 und Remarks on Mr. Chandlers Law of Variation of Terrestrial Latitude. Astronomical Journal Bd. 11, 12, 19.

**) On the Rotation of an elastic Spheroid, Philos. Transactions R. Soc. London (1896) Bd. 187, pag. 319.

sei $\omega$. Eine mögliche Gleichgewichtsform der Flüssigkeit ist dann ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid, welches die Rotationsaxe zur Symmetrieaxe hat (Mac Laurinsches Ellipsoid). *Die Elliptizität desselben wird, unter der Annahme, dafs dieselbe klein ausfällt, durch die Formel gegeben*

$$(1) \qquad \varepsilon_1 = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 R}{g},$$

wo $g$ die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche unserer Flüssigkeit bedeutet.

Den Verhältnissen der Erde entsprechen die folgenden in Metern und Sekunden ausgedrückten Zahlenwerte:

$$(2) \qquad \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}, \quad R = \frac{2}{\pi} 10^7, \quad g = 9{,}81, \quad \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{1}{289}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{231}.$$

Bei der Ableitung der Gl. (1) können wir, wenn wir uns nicht auf die (übrigens sehr bekannten) Formeln für das Potential eines Ellipsoides berufen wollen, mit Vorteil an unsere frühere Vorstellung des „Erdringes" anknüpfen. Ebenso wie früher die feste Erde ersetzen wir jetzt unsere ellipsoidische Flüssigkeit durch eine Kugel (Radius $R$, Masse $M$) und einen in der Äquatorebene des Ellipsoides gelegenen Ring (Radius $R$, Masse $m$). Wie wir in § 1 dieses Kapitels sahen, wird das Gravitationspotential der Kombination Kugel + Ring in einem äufseren Punkte bis zu den Gliedern zweiter Ordnung einschliefslich gleich dem Potential irgend einer anderen Massenverteilung von den gleichen Hauptträgheitsmomenten. Die Trägheitsmomente unserer Flüssigkeitsmasse um die Rotationsaxe ($z$-Axe) bez. um zwei dazu senkrechte Axen ($y$- und $x$-Axe) seien $C$, $A$, $A$. Unter der Elliptizität verstehen wir wie früher das Verhältnis*)

$$\varepsilon = \frac{C - A}{A}.$$

Die Masse $m$ des Ringes ist nach Gl. (1) von § 1 folgendermafsen zu wählen:

$$(3) \qquad m = \frac{2(C - A)}{R^2} = \frac{2A}{R^2}\varepsilon = \frac{4}{5}M\varepsilon,$$

*) Neben dieser Definition kommt in der Litteratur die folgende vor:

$$\varepsilon = \frac{a - b}{a},$$

wo $a$ die grofse, $b$ die kleine Axe des Ellipsoides bedeutet. Man überzeugt sich leicht mit Rücksicht auf pag. 600, dafs für eine *homogene* Massenverteilung diese Definition bis auf höhere Potenzen von $\varepsilon$ mit der unsrigen übereinstimmt.

wobei wir für $A$ den Näherungswert $A = \frac{2}{5} MR^2$ eingeführt haben, der das Trägheitsmoment einer Kugel vom Radius $R$ bedeutet.

Ist $r$ der Abstand eines beliebigen äufseren Punktes $P$ vom Mittelpunkte der Flüssigkeitsmasse, so wird das Potential von Kugel und Ring in $P$

$$V = f\left(\frac{M}{r} + \frac{m}{r}\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+(R/r)^2 - 2(R/r)s}}\right),$$

die Integration erstreckt über den Umfang des Ringes. Dabei bedeutet $s$ ähnlich wie pag. 639 die Abkürzung

$$s = \frac{xx' + yy' + zz'}{rR},$$

wo $x, y, z$ die Koordinaten von $P$, $x', y', z'$ die eines Ringpunktes sind. Legen wir die $xz$-Ebene durch den Punkt $P$ und die $xy$-Ebene durch den Ring, und nennen $\Theta$ den Winkel zwischen $OP$ und $OX$, so wird

$$x = r\cos\Theta, \quad y = 0, \quad z = r\sin\Theta,$$
$$x' = R\cos\varphi, \quad y' = R\sin\varphi, \quad z' = 0,$$

und daher

$$s = \cos\Theta\cos\varphi.$$

Die Potenzentwickelung der Quadratwurzel liefert ähnlich wie pag. 639:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(R/r)^2 - 2(R/r)s}} = 1 + \frac{R}{r}s + \left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}\right) + \cdots$$

und die Ausführung der Integration

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+(R/r)^2 - (R/r)s}} = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\frac{3}{4}\cos^2\Theta - \frac{1}{2}\right) + \cdots \\ \displaystyle\qquad = 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right) + \cdots. \end{cases}$$

Daher wird das Potential der Anziehung, wenn wir für $m$ den Wert (3) eintragen:

$$V = fM\left(\frac{1}{r} + \frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{r} + \frac{3}{5}\varepsilon\frac{R^2}{r^3}\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right) + \cdots\right).$$

Wir suchen den Wert von $V$ für die Oberfläche der Flüssigkeitsmasse, deren Gleichung wir schreiben dürfen:

$$(5)\qquad r = R\left(1 + \varepsilon\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right)\right),$$

(vgl. Gl. (2) von pag. 601, wo wir für den dort definierten mittleren Radius $m$ den Näherungswert $R$ nehmen). Wegen der Kleinheit von $\varepsilon$ können wir

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - \varepsilon\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right)\right)$$

schreiben. Diesen Wert tragen wir in das erste Glied des Ausdrucks für $V$ ein; ferner dürfen wir in den folgenden mit $\varepsilon$ behafteten und daher als klein zu behandelnden Gliedern des Potentials direkt $r = R$ setzen. Es ergibt sich so:

$$V = \frac{fM}{R}\left(1 + \frac{4}{5}\varepsilon - \varepsilon\left(1 - \frac{3}{5}\right)\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right) + \cdots\right). \tag{6}$$

Die Oberfläche der rotierenden Flüssigkeit mufs eine Fläche konstanten Druckes sein. Daraus folgt nach den Grundsätzen der Hydrodynamik, dafs auch die potentielle Energie der auf die Masseneinheit der Flüssigkeit wirkenden Kräfte längs der Oberfläche konstant sein mufs. Diese Kräfte sind die Gravitation einerseits und die Centrifugalkraft andrerseits. Die potentielle Energie der letzteren ist, für die Masseneinheit berechnet, in einem beliebigen Punkte des rotierenden Ellipsoides:

$$U = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\Theta,$$

also insbesondere in der Oberfläche des Ellipsoides, wo näherungsweise $r = R$ ist, mit einer kleinen formalen Abänderung:

$$U = \frac{1}{3}\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}\omega^2 R^2\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right). \tag{7}$$

Damit die Summe $V + U$ auf der Oberfläche der Flüssigkeit einen konstanten, d. h. von $\Theta$ unabhängigen Wert erhält, ist es notwendig, dafs die Faktoren von $\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right)$ in (6) und (7) entgegengesetzt gleich sind. Dies liefert die Gleichung:

$$\frac{2}{5}\frac{fM}{R}\varepsilon = \frac{1}{2}\omega^2 R^2, \tag{8}$$

woraus sich ergiebt:

$$\varepsilon = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 R^3}{fM}.$$

Führen wir noch die Gravitationsbeschleunigung $g$ an der Oberfläche unserer Flüssigkeitsmasse ein, nämlich $g = fM/R^2$ (näherungsweise), so erhalten wir direkt den oben angegebenen Wert $\varepsilon_1$ aus Gl. (1).

Gl. (1) ist von Clairaut gegeben und bildet eine Grundformel in der Theorie von der Figur der Erde. Sie setzt voraus, dafs die Dichte der Flüssigkeit konstant ist und dafs die Centrifugalwirkung lediglich durch die Gravitation im Gleichgewicht gehalten wird.

Bekanntlich bezeichnet man diejenigen Funktionen von $\Theta$, die in Gl. (4) als Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von $R/r$ bei der Entwickelung des reziproken Abstandes zweier Punkte auftreten, als *Kugelfunktionen**). Eine solche Funktion und zwar eine „Kugelfunktion

*) Genauer gesagt als *Kugelflächenfunktionen*. Unter einer *räumlichen Kugelfunktion* versteht man jeden Ausdruck, der homogen in den rechtwinkligen Koordi-

zweiter Ordnung“ ist der obige Ausdruck $\cos^2\Theta - 2/3$. Die vorstehend berechnete Reihe (6) für $V$ stellt, können wir sagen, die Entwickelung des Potentials nach Kugelfunktionen dar. Ferner haben wir in Gl. (7) auch den Ausdruck von $U$ nach Kugelfunktionen geordnet. In der Gleichgewichtsbedingung (8) endlich haben wir die beiden Terme von $V$ und $U$, welche unsere Kugelfunktion zweiter Ordnung enthalten, mit einander verglichen und gelangten dadurch zur Berechnung der Elliptizität. Wir können diese Gleichgewichtsbedingung schematisch folgendermaſsen schreiben, wenn wir mit $U_2$ und $V_2$ den betr. Term in der Entwickelung von $U$ und $V$ bezeichnen, wobei wir $V_2$ für die Elliptizität 1 berechnen und bei der Berechnung von $U_2$, mit Rücksicht darauf, daſs die Centrifugalkraft eine störende Ursache von kleinem Betrage darstellt, von der Elliptizität überhaupt absehen:

$$\varepsilon V_2 = U_2, \qquad V_2 = \frac{2}{5}\frac{fM}{R}\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right). \tag{9}$$

Wegen näherer Ausführung der Theorie, insbesondere bei beträchtlichen Werten der Elliptizität, müssen wir auf die Litteratur*) verweisen.

*Zweites Problem.* Eine homogene elastisch-feste Kugel vom Radius $R$ und der Dichte $\varrho$ wird mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um einen ihrer Durchmesser gedreht. Sie geht dabei in ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid über, welches die Rotationsaxe zur Symmetrieaxe hat. Das elastische Verhalten des Materials sei dadurch bestimmt, daſs wir den Elastizitätsmodul ($E$) geben und annehmen, daſs das Material incompressibel sei, daſs also das Poissonsche Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdehnung den speziellen Wert 1/2 habe. Die letztere Annahme vereinfacht die Rechnungen und hat auf das Resultat keinen erheblichen Einfluſs.

*Die Elliptizität des so entstehenden Ellipsoides wird alsdann*

$$\varepsilon_2 = \frac{15}{38}\frac{\varrho\,\omega^2 R^2}{E}. \tag{10}$$

Um auch hier zunächst ein Zahlenbeispiel zu geben, welches sich den Verhältnissen der Erde anschlieſst, wählen wir in CGS-Einheiten

$$\varrho = 5{,}5, \qquad \omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}, \qquad R = \frac{2}{\pi}\,10^9$$

---

naten $x, y, z$ ist und der Potentialgleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$ genügt. Aus einer räumlichen Kugelfunktion entsteht eine Kugelflächenfunktion, wenn man in dem Ausdruck der ersteren $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$ setzt.

*) H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895, Kap. XII, pag. 580. W. Wien, Hydrodynamik, Leipzig 1900, Kap. VIII, pag. 303. Thomson und Tait, Natural Philosophy II, Cambridge 1895, art. 771, 793 ff. Ausführliche Litteraturangabe bei A. E. H. Love, Encykl. d. math. Wissensch. Bd. IV, Art. 16, Nr. 4.

und nehmen $E$ gleich dem Elastizitätsmodul von Stahl, d. h. rund gleich $2{,}2 \cdot 10^6$ (kg Gewicht/cm²) $= 2{,}2 \cdot 981 \cdot 10^9$ CGS-Einheiten. Es wird dann

$$\text{(11)} \qquad \frac{\varrho \omega^2 R^2}{E} = \frac{1}{184}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{465}.$$

Bei der Ableitung der Gl. (10) müssen wir auf die Grundlagen der Elastizitätstheorie zurückgehen.

Sind $u, v, w$ die Verrückungen eines Punktes im Innern der Kugel nach den Koordinatenaxen, welche letztere ebenso wie unter 1) gewählt werden, so gilt zunächst wegen der vorausgesetzten Incompressibilität:

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die elastischen Differentialgleichungen nehmen für ein incompressibles, durch Centrifugalwirkungen beanspruchtes Material die Form an:

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \frac{E}{3}\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{E}{3}\Delta v + \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho \frac{\partial U_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{E}{3}\Delta w + \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

$\Delta$ bedeutet wie üblich die Abkürzung für den zweiten Differentialparameter, $p$ ist ein von Ort zu Ort wechselnder allseitiger Druck, welcher so zu bestimmen ist, daſs der Bedingung (12) Genüge geleistet wird. $U_2$ bedeutet den oben definierten mit $\Theta$ variabeln Teil des Potentials der Centrifugalkraft (s. Gl. (7)):

$$\text{(7')} \qquad U_2 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right) = \frac{\omega^2}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Wie man sieht ist $U_2$ (vgl. die Anm. zu pag. 691) eine räumliche Kugelfunktion zweiter Ordnung. Von dem in (7) zu $U_2$ hinzutretenden Terme $\frac{1}{3}\omega^2 r^2$ sehen wir im Folgenden ab, da dieser nur die Gröſse, nicht die Gestalt der Kugel abändern kann und bei einem incompressibeln Material überhaupt ohne Einfluſs ist.

Die Differentialgleichungen (12) und (13) sind noch zu ergänzen durch die Bedingungen dafür, daſs die Kugelfläche eine kräftefreie Oberfläche ist. Sie besagen, daſs die auf jedes Oberflächenelement wirkenden Spannungen nach allen drei Koordinatenrichtungen verschwinden müssen. In den Verrückungen $u, v, w$ geschrieben lautet die Bedingung für die $x$-Richtung:

$$\left(\frac{2}{3}E\frac{\partial u}{\partial x} + p\right)\cos(n, x) + \frac{E}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(n, y) + \frac{E}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n, z) = 0;$$

da für die Kugel $\cos(n,x):\cos(n,y):\cos(n,z) = x:y:z$, können wir hierfür schreiben:

$$(14)\qquad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}+z\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{3p}{E}x.$$

Die auf die $y$- und $z$-Richtung bezüglichen Bedingungen folgen aus (14) durch cyklische Vertauschung von $(x\,y\,z)$, $(u\,v\,w)$.

Wir behaupten nun, daſs den Gleichungen (12) bis (14) bei geeigneter Wahl der Konstanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ durch den folgenden Ansatz genügt wird:

$$(15)\qquad \begin{cases} u = \alpha\dfrac{\partial U_2}{\partial x}+\beta r^2\dfrac{\partial U_2}{\partial x}+\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}(r^2U_2),\\ v = \alpha\dfrac{\partial U_2}{\partial y}+\beta r^2\dfrac{\partial U_2}{\partial y}+\gamma\dfrac{\partial}{\partial y}(r^2U_2),\\ w = \alpha\dfrac{\partial U_2}{\partial z}+\beta r^2\dfrac{\partial U_2}{\partial z}+\gamma\dfrac{\partial}{\partial z}(r^2U_2),\end{cases}$$

welcher somit die vollständige Lösung des gestellten Problems enthält.

Bei dem folgenden Beweise werden wir des öfteren von den nachstehenden Regeln Gebrauch zu machen haben, welche unmittelbar aus der Definition der Kugelfunktionen und ihrer Homogenität folgen:

$$\Delta U_2 = 0,\qquad \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)U_2 = 2U_2,\qquad \Delta(r^2U_2) = 14U_2,$$

$$\Delta\left(r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}\right) = 10\frac{\partial U_2}{\partial x}\ \text{etc.}$$

Wir tragen den Ansatz (15) zunächst in die Gleichung (12) ein und erhalten:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = (4\beta+14\gamma)U_2 = 0;$$

hiernach ist

$$(16)\qquad \beta = -\frac{7}{2}\gamma$$

zu wählen. Indem wir auf die erste der Gleichungen (13) übergehen, berechnen wir nach (15) und (16):

$$\Delta u = (10\beta+14\gamma)\frac{\partial U_2}{\partial x} = -21\gamma\frac{\partial U_2}{\partial x}.$$

Es muſs also nach (13) sein:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (7E\gamma-\varrho)\frac{\partial U_2}{\partial x};$$

entsprechend ergiebt sich

$$\frac{\partial p}{\partial y} = (7E\gamma-\varrho)\frac{\partial U_2}{\partial y},\qquad \frac{\partial p}{\partial z} = (7E\gamma-\varrho)\frac{\partial U_2}{\partial z}.$$

Wir schlieſsen hieraus, indem wir von der Hinzufügung einer Integrationskonstanten absehen:

$$(17)\qquad p = (7E\gamma-\varrho)U_2.$$

Schliefslich haben wir die Oberflächenbedingung (14) zu betrachten. Wir bilden zunächst aus (15)

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\alpha\frac{\partial U_2}{\partial x}+3\beta r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}+3\gamma r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}+6\gamma x U_2,$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}+z\frac{\partial w}{\partial x}=\alpha\frac{\partial U_2}{\partial x}+\beta r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}+4\beta x U_2+3\gamma r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}+6\gamma x U_2;$$

Gl. (14) verlangt also mit Rücksicht auf (17):

$$(2\alpha+4\beta r^2+6\gamma r^2)\frac{\partial U_2}{\partial x}+(4\beta+12\gamma)xU_2=-3\left(7\gamma-\frac{\varrho}{E}\right)xU_2.$$

Wir tragen für $\beta$ den Wert aus (16) ein und schreiben, indem wir die auf die $y$- und $z$-Richtung bezüglichen Gleichungen hinzufügen:

$$(2\alpha-8\gamma r^2)\frac{\partial U_2}{\partial x}+\left(19\gamma-\frac{3\varrho}{E}\right)xU_2=0,$$

$$(2\alpha-8\gamma r^2)\frac{\partial U_2}{\partial y}+\left(19\gamma-\frac{3\varrho}{E}\right)yU_2=0,$$

$$(2\alpha-8\gamma r^2)\frac{\partial U_2}{\partial z}+\left(19\gamma-\frac{3\varrho}{E}\right)zU_2=0.$$

Wird nunmehr der Ausdruck (7') für $U_2$ eingeführt, so werden die beiden ersten Gleichungen nach Forthebung je eines gemeinsamen Faktors unter sich identisch. Unser Gleichungstripel reduziert sich daher auf das folgende Gleichungspaar:

$$2(2\alpha-8\gamma r^2)+\left(19\gamma-\frac{3\varrho}{E}\right)(x^2+y^2-2z^2)=0,$$

$$-4(2\alpha-8\gamma r^2)+\left(19\gamma-\frac{3\varrho}{E}\right)(x^2+y^2-2z^2)=0,$$

welches in allen Punkten der Kugeloberfläche $r=R$ erfüllt sein soll. Es ist dieses nur möglich, wenn

$$(18)\qquad 2\alpha-8\gamma R^2=0,\quad 19\gamma-\frac{3\varrho}{E}=0.$$

Durch diese Gleichungen zusammen mit Gl. (16) sind die erforderlichen Werte unserer Koeffizienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bestimmt; sie lauten:

$$(19)\qquad \gamma=\frac{3}{19}\frac{\varrho}{E},\quad \beta=-\frac{21}{38}\frac{\varrho}{E},\quad \alpha=\frac{12}{19}\frac{\varrho}{E}R^2.$$

Gleichzeitig ist durch diese Bestimmung der Beweis für die Richtigkeit des Ansatzes (15) erbracht.

Es ist nun leicht, die Elliptizität des durch die Deformation entstehenden Ellipsoides zu berechnen. Wir bilden zu dem Zwecke den Ausdruck für die radiale Verrückung eines Punktes an der Oberfläche der Kugel, nämlich

$$\delta R=\frac{1}{R}(ux+vy+wz).$$

Nach (15) wird:

$$\delta R = \left(\frac{2\alpha}{R} + 2\beta R + 4\gamma R\right) U_2,$$

also wegen (19):

$$(20) \qquad \delta R = \frac{15}{19} \frac{\varrho}{E} R U_2.$$

Andrerseits wird diese selbe Verrückung, wenn wir sie aus der Ellipsoidgleichung (5) berechnen:

$$(21) \qquad \delta R = r - R = R\varepsilon\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right).$$

Durch Vergleich von (20) und (21) folgt, wenn wir den Oberflächenwert von $U_2$ aus Gl. (7') entnehmen, in der That der in (10) angegebene Wert $\varepsilon = \varepsilon_2$.

Wir wollen noch das Resultat der Vergleichung von (20) und (21) in der folgenden Form darstellen, die uns demnächst von Nutzen sein wird:

$$(22) \qquad \varepsilon W_2 = U_2, \quad W_2 = \frac{19}{15} \frac{E}{\varrho}\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right).$$

$W_2$ bedeutet eine Kugelflächenfunktion, durch welche das elastische Verhalten unserer Kugel charakterisiert wird. Gl. (22) kann ähnlich wie Gl. (9) als Gleichgewichtsbedingung angesprochen werden, da sie uns angiebt, bei welcher Abplattung die Centrifugalkräfte durch die elastischen Kräfte an der Oberfläche gerade aufgehoben werden.

Die vorstehenden Resultate sind unter allgemeineren Voraussetzungen von Lord Kelvin*) abgeleitet worden. Lord Kelvin betrachtet statt eines incompressibeln einen *beliebigen* elastischen Körper und statt der besonderen Kugelfunktion $U_2$ eine Störungsfunktion $U_n$ von der Ordnung $n$; auch berücksichtigt er die bei der Erde nachweisbare Zunahme der Dichte nach dem Erdmittelpunkte hin. Durch Voranstellen der einfachsten Annahmen gelang es uns, die Kelvinschen Rechnungen bedeutend zu kürzen.

*Drittes Problem.* Wir betrachten abermals eine Kugel aus elastischfestem Material, die in der Umdrehung $\omega$ begriffen ist, berücksichtigen aber aufser dem elastischen den von der gegenseitigen Gravitation ihrer Teile herrührenden Widerstand gegen Formänderungen. Bei gleichem elastischen Verhalten wie im vorhergehenden Falle mufs die Elliptizität jetzt kleiner ausfallen, weil der Widerstand gegen die Abänderung der Kugelgestalt vergröfsert ist. *Wir behaupten, dafs sich nunmehr die Elliptizität aus der Formel berechnet***):

---

*) Thomson und Tait, Natural Philosophy, Part II, namentlich art. 834. Sir W. Thomson, Mathem. and Phys. Papers, Vol. III, art. 45. Vgl. auch A. E. H. Love, Elasticity, Cambridge 1892, Chap. X.

**) Thomson und Tait, Natural Philosophy, art. 840.

$$\frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}, \tag{23}$$

wo $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ durch Gl. (1) und (10) bestimmt sind.

Der Beweis ist in den Gl. (9) und (22) enthalten. Wenn allein die Gravitation oder allein die Elastizität den Centrifugalkräften entgegenwirkt, fanden wir:

$$\varepsilon_1 V_2 = U_2 \quad \text{bez.} \quad \varepsilon_2 W_2 = U_2. \tag{24}$$

Wenn beide Widerstände zusammen das Gleichgewicht gegenüber den Centrifugalkräften herstellen, lautet die Gleichgewichtsbedingung, unter $\varepsilon_3$ die nunmehrige Elliptizität verstanden:

$$\varepsilon_3 V_2 + \varepsilon_3 W_2 = U_2.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $\varepsilon_3 U_2$ und drücken wir die Verhältnisse $V_2/U_2$, $W_2/U_2$ nach (24) durch $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ aus, so ergiebt sich genau die zu beweisende Gleichung (23).

Für eine Versuchskugel von mäfsigen Dimensionen ist $\varepsilon_1$ aufserordentlich grofs gegen $\varepsilon_2$. Aus (1) und (10) ergiebt sich nämlich

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{19}{6} \frac{E}{\varrho R g}.$$

Die Gröfse $g$, welche die auf der Oberfläche unserer Versuchskugel statthabende, durch deren Gravitation bewirkte Fallbeschleunigung bedeutet, ist um so viel kleiner als die Fallbeschleunigung auf der Erde, wie der Radius der Kugel kleiner ist als der Erdradius, (gleiche mittlere Dichte von Kugel und Erde vorausgesetzt). Aus dieser Kleinheit von $g$ sowie aus der Gröfse von $E$ folgt, dafs $\varepsilon_2$ gegen $\varepsilon_1$, also $1/\varepsilon_1$ gegen $1/\varepsilon_2$ vernachlässigt werden kann. Gl. (23) besagt in diesem Falle $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, d. h. unter Laboratoriumsverhältnissen könnte man bei der fraglichen centrifugalen Deformation von dem Einflufs der Gravitation kurzweg absehen. Mit Vergröfserung der Dimensionen der Kugel nimmt aber $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ quadratisch ab; bei einer Kugel von der Gröfse der Erde und der Elastizität des Stahles ist dementsprechend $1/\varepsilon_1 = 231$ gegen $1/\varepsilon_2 = 465$ nicht mehr zu vernachlässigen. Die Elliptizität einer solchen Kugel wäre daher nach (23) zu berechnen und würde rund $1/700$ betragen, also wesentlich kleiner sein, wie wenn die Elastizität allein der Centrifugalwirkung entgegenarbeiten würde.

Man mufs aber nicht glauben, dafs die beobachtbare Elliptizität der Erde in dem hier erörterten Sinne durch die gemeinsame Wirkung von Gravitation und Elastizität bestimmt würde, so dafs ihre Berechnung unter Zugrundelegung eines geeigneten Elastizitätsgrades $E$ nach der Formel (23) zu erfolgen hätte. Wir müssen uns vielmehr vorstellen, dafs die Erde einst, so wie die Sonne jetzt, in

feurig-flüssigem Zustande war. In diesem Zustande konnte nur die Gravitation der Centrifugalwirkung das Gleichgewicht halten. Die Elliptizität mufste also $\varepsilon_1 = 5\omega^2 R/4g$ betragen. Bei allmählicher Abkühlung der Erdmasse trat alsdann Erstarrung ein und zwar nach der Schilderung, die Lord Kelvin von diesem Vorgange entwirft, durch einen verhältnismäfsig raschen Prozefs. Die Elliptizität der nunmehr festen Erdform stimmte dabei, darf man annehmen, im Wesentlichen mit der der früheren Flüssigkeitsform überein. In dieser Form ist die Erde, bei gleichbleibender Rotation $\omega$, *spannungsfrei*. Die Erde befindet sich in dieser abgeplatteten Form in ihrem natürlichen Zustande; elastische Kräfte treten nur auf, sofern durch Abänderung der Rotationsverhältnisse oder durch anderweitige Kräfte eine Abänderung dieser ursprünglichen Form angestrebt wird, wobei die elastischen Kräfte in dem Sinne wirken werden, dafs sie jene spannungsfreie Form wiederherzustellen suchen.

Es folgt hieraus, dafs man aus der heutzutage beobachtbaren Elliptizität über die elastischen Eigenschaften des Erdkörpers unmittelbar nichts entnehmen kann. Die Sache liegt hier anders wie bei der oben erwähnten Versuchskugel, deren natürlicher Zustand bei nicht vorhandener Rotation die Kugelform sein sollte, bei der also elastische Widerstände auftreten, wenn durch die Centrifugalwirkung diese Kugelform abgeändert wird. Infolgedessen wird sich in der Gestalt der rotierenden Versuchskugel der Einflufs der elastischen Kräfte und zwar bei mäfsigen Dimensionen, wie wir sahen, in vorherrschender Weise ausprägen; dagegen legt die thatsächliche Gestalt der Erde bei normaler Rotationsgeschwindigkeit $\omega$ nur von der Gravitationswirkung Zeugnis ab.

*Viertes Problem.* Indem wir uns den bei der Erde vorliegenden Verhältnissen um einen weiteren Schritt nähern, gehen wir jetzt von einem in der Umdrehung $\omega$ begriffenen abgeplatteten Ellipsoid von der Elliptizität $\varepsilon_1$ aus, welches aus gravitierendem, elastischen Material besteht und sich in dieser Form und Bewegung im spannungsfreien Gleichgewicht befindet. Wir fragen, welche Elliptizität $\varepsilon$ es annehmen würde, *wenn die Rotation aufhört.* Diese Elliptizität wird jedenfalls kleiner sein als $\varepsilon_1$; dabei wird die Gravitation die Verkleinerung der Elliptizität begünstigen, die Elastizität ihr widerstehen.

*Wir behaupten, dafs sich die gesuchte Elliptizität $\varepsilon$ mittels der früher* (Gl. (1) und (9)) *berechneten Elliptizitäten $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ folgendermafsen ausdrückt:*

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{25}$$

Daneben merken wir noch den Unterschied der Elliptizitäten in dem spannungsfreien Zustande bei der Rotation $\omega$ und dem Zustande nach Aufhören der Rotation an. Dieser Unterschied heifse $\varepsilon'$; er beträgt nach (25)

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 - \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{26}$$

Den Beweis führen wir auf doppelte Art:

a) In dem natürlichen Zustande des Ellipsoides (Rotation $\omega$, Elliptizität $\varepsilon_1$) herrscht Gleichgewicht zwischen Centrifugalkräften und Gravitation. Nach (9) gilt daher für diesen Zustand:

$$\varepsilon_1 V_2 = U_2.$$

In dem deformierten Zustande (Rotation 0, Elliptizität $\varepsilon$) haben wir dagegen Gleichgewicht zwischen Gravitation und Elastizität. Da die elastischen Kräfte nach dem spannungsfreien Zustande (Elliptizität $\varepsilon_1$) hinstreben, ist die elastische Wirkung jetzt zu messen durch den Unterschied $\varepsilon'$ der Elliptizitäten und wird gegeben durch $\varepsilon' W_2$. Das Gleichgewicht zwischen Gravitation und Elastizität erfordert

$$\varepsilon V_2 = \varepsilon' W_2 \quad \text{oder} \quad \varepsilon V_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon) W_2.$$

Wir dividieren diese Gleichung durch $U_2$ und setzen nach (9) und (22) $V_2/U_2 = 1/\varepsilon_1$, $W_2/U_2 = 1/\varepsilon_2$. Dann ergiebt sich

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{27}$$

was mit Gl. (25) übereinstimmt.

Indem wir direkt an die oben gefundene Lösung unseres dritten Problems anknüpfen, können wir auch folgendermafsen schliefsen:

b) In dem spannungsfreien Zustande $\varepsilon_1$ des rotierenden Ellipsoids denken wir uns die Centrifugalkräfte gegen die Gravitationswirkungen gestrichen. Um zu dem rotationslosen Zustand $\varepsilon$ überzugehen, haben wir die Centrifugalkräfte im umgekehrten Sinne (also centripetal), sowie den Unterschied der Gravitationskräfte gegen jenen früheren Zustand im umgekehrten Sinne (oder centrifugal) an unserem Ellipsoide anzubringen. In dem gleichen (centrifugalen) Sinne wirken die elastischen Kräfte, die ja den Zustand $\varepsilon_1$ herzustellen streben. Mithin wirken bei dem Übergange von dem Zustande $\varepsilon_1$ zum Zustande $\varepsilon$, d. h. bei der Elliptizitätsänderung $\varepsilon'$, die elastischen Kräfte und die Unterschiede der Gravitationskräfte zusammengenommen den dem Sinne nach umgekehrten Centrifugalkräften entgegen. Die so entstehende Änderung $\varepsilon'$ der Elliptizität kann daher unmittelbar nach Gl. (23) berechnet werden; wir erhalten:

$$(28) \qquad \frac{1}{\varepsilon'} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2},$$

was mit (26) übereinstimmt. —

Nach Erledigung dieser vier vorbereitenden Probleme gehen wir nun auf den eigentlichen Gegenstand dieses §, die *Erklärung der Chandlerschen Periode,* ein. Dabei erinnern wir uns der Resultate aus Kap. VII, § 8, betreffend die Nutationsperiode*) eines Kreisels von deformierbarem Material und nahezu kugelförmiger Gestalt. Wir sahen pag. 607, daſs diese sich aus der „ursprünglichen“ Elliptizität $\varepsilon$, die der Kreisel im Ruhezustande bei der Rotation Null haben würde, und nicht aus derjenigen Elliptizität berechnet, die das in Rotation begriffene Sphäroid aufweist und die wir $\mathsf{E} = \varepsilon + \varepsilon'$ nannten. Die Formel lautete (vgl. Gl. (12) von pag. 607):

$$(29) \qquad \frac{\text{Nutationsperiode}}{\text{Umdrehungsdauer}} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Im Falle der Erde ist die Umdrehungsdauer gleich einem Tage, $\varepsilon$ bedeutet diejenige Elliptizität, die die Erde bei der Rotation Null annehmen würde, ist also nach Gl. (25) zu berechnen. Die Elliptizität $\mathsf{E}$ des rotierenden Kreisels ist im Falle der Erde mit $\varepsilon_1$ zu identifizieren; die Differenz beider Elliptizitäten wurde im Vorstehenden sowohl wie früher mit $\varepsilon'$ bezeichnet. Dabei besteht der Unterschied, daſs wir uns früher diese zusätzliche Elliptizität $\varepsilon'$ allein durch die elastischen Eigenschaften des Kreisels bedingt dachten, während sie bei der Erde im Sinne der Gleichung (28) aus den elastischen und Gravitationswirkungen zusammen hervorgeht. Die Anwendbarkeit unserer früheren Überlegungen wird dadurch nicht beeinträchtigt; denn es wurde bei jenen lediglich das Vorhandensein einer Deformation überhaupt, nicht die Umstände, unter denen dieselbe zustande kam, in Rechnung gesetzt. Ebensowenig macht es für die mechanische Betrachtung etwas aus, daſs wir früher den Kreisel im rotationslosen Zustande $\varepsilon$ als spannungsfrei, im Zustande $\varepsilon + \varepsilon'$ dagegen als elastisch beansprucht ansahen, während umgekehrt die Erde im Zustande $\varepsilon_1 = \varepsilon + \varepsilon'$ spannungsfrei ist und in dem daraus abgeleiteten, gedachten, rotationslosen Zustand $\varepsilon$ von elastischen Spannungen ergriffen ist, in solchem Maſse, daſs sie vielleicht unter dem Einfluſs dieser Spannungen zerbersten würde. Denn es kann uns für die Bestimmung der Bewegung eines Körpers gleichgültig sein, ob an dem Körper ein Kraftsystem hinzugefügt oder fortgenommen wird, vorausgesetzt, daſs sich dasselbe am Körper das Gleichgewicht hält.

*) Wegen der Benennung (freie Nutation = kräftefreie Präcession) vgl. den Anfang von § 8, p. 599 unten.

Nach Gleichung (29) und (25) wird nun die Periode der freien Nutation der Erde, in Tagen ausgedrückt, gleich

$$(30) \qquad \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1^{\,2}} = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right).$$

Wäre das Material der Erde absolut starr (ihr Elastizitätsmodul unendlich grofs, also $\varepsilon_2 = 0$), so wäre die Nutationsperiode aus der Elliptizität der *rotierenden* Erde zu berechnen und gleich $1/\varepsilon_1$. Ist aber die Erde elastisch nachgiebig (Elastizitätsmodul endlich, $\varepsilon_2 > 0$), so kommt es auf die Elliptizität der *rotationslos gedachten* Erde an und es tritt zu $1/\varepsilon_1$ ein Zusatzglied hinzu. *Die elastische Nachgiebigkeit der Erde verlängert also die Periode der freien Nutation,* und zwar in dem Verhältnis $1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1 : 1$. Legen wir beispielsweise der Erde den Elastizitätsmodul des Stahles bei, so ergiebt sich für dieses Vergröfserungsverhältnis:

$$1 + \frac{231}{465} = 1{,}5.$$

Setzen wir die Nutationsperiode der absolut starren Erde (Eulersche Periode) gleich 10 Monaten, so folgt als Nutationsperiode einer Erde von der Elastizität des Stahles die Zeitdauer von 15 Monaten. Da andererseits die Beobachtung eine Nutationsperiode von 14 Monaten (Chandlersche Periode), also gegenüber der Eulerschen ein Vergröfserungsverhältnis von 1,4 ergeben hat, so schliefsen wir, dafs für das Material der Erde

$$1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1{,}4$$

gelte. Hieraus können wir den effektiven Elastizitätsgrad der Erde entnehmen. Es ergiebt sich

$$\varepsilon_2 = 0{,}4\,\varepsilon_1 = \frac{0{,}4}{231} = \frac{1}{578}.$$

Nach Gl. (10) ist die Gröfse $\varepsilon_2$ dem Elastizitätsmodul des betr. Materials umgekehrt proportional und nach Gl. (11) gilt für Stahl $\varepsilon_2 = 1/465$. Mithin berechnet sich der Elastizitätsmodul der Erde gleich dem 578/465-fachen, d. h. gleich dem 1,24-fachen des Elastizitätsmoduls von Stahl. *Wir brauchen also der Erde nur einen sehr geringen Grad von elastischer Nachgiebigkeit zuzuschreiben, um die Verlängerung der Eulerschen in die Chandlersche Periode auf diesem Wege zu erklären: Die Erde mufs ihrem durchschnittlichen elastischen Verhalten nach noch etwas weniger nachgiebig sein als Stahl, oder einen noch etwas höheren Elastizitätsmodul besitzen wie dieser.*

Bei dieser Schlufsweise bedarf noch ein Punkt der Erläuterung. Der angegebene Wert (30) für die Nutationsdauer der Erdaxe ergiebt unter der Annahme der Starrheit ($\varepsilon_2 = 0$) die Periode $1/\varepsilon_1 = 231$ Tage.

Diese Periode ist von der Eulerschen verschieden und beträgt noch nicht 8 Monate. Der Grund dieser Verschiedenheit liegt natürlich darin, daſs die wirkliche Elliptizität der Erde von derjenigen verschieden ist, die wir unter der Annahme homogener Massenverteilung auf hydrodynamischem Wege berechnet haben. Im Vorstehenden haben wir uns offenbar eine gewisse Inkonsequenz zu Schulden kommen lassen, indem wir das Vergröſserungsverhältnis $1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1$ aus der *theoretischen Formel* (30) bestimmten, dagegen die Nutationsperiode bei starrem Verhalten der Erde gleich der Eulerschen Periode setzten, welche mittelbar aus den astronomischen *Beobachtungen* über die Präcession der Erde entnommen wird. Diese Inkonsequenz läſst sich nachträglich folgendermaſsen rechtfertigen.

Der theoretische Wert $\varepsilon_1 = 1/231$ nimmt auf die Ungleichförmigkeit der Massenverteilung im Innern der Erde keine Rücksicht und stellt nur eine *obere Grenze* für die Elliptizität der Erde dar, deren mittlere Dichte erfahrungsgemäſs viel gröſser ist als ihre Oberflächendichte. Thatsächlich ist denn auch die wirkliche Elliptizität der Erde (1/304 nach den astronomischen Beobachtungen, vgl. pag. 663) oder die wirkliche Abplattung (1/298 nach den geodätischen Messungen) kleiner als der für homogene Massenverteilung berechnete Wert 1/231. Auch ist es klar, daſs bei inhomogener Massenverteilung der Begriff der Elliptizität selbst insofern unbestimmt wird, als die beiden pag. 689 genannten Definitionen alsdann zu verschiedenen Zahlenwerten führen müssen. Die eine im Text gegebene Definition könnten wir als *Massen-Elliptizität*, die andere in der Anmerkung gegebene zum Unterschiede davon als *Abplattung* oder als *Oberflächen-Elliptizität* bezeichnen. Zahlreiche Untersuchungen von Radau, Callandreau, Poincaré und älteren Forschern beschäftigen sich mit der Frage, wie das (als stetig vorausgesetzte) Gesetz der Dichtigkeitszunahme nach dem Erdinnern beschaffen sein muſs, damit es mit der erfahrungsmäſsigen Massen- und Oberflächenelliptizität, sowie mit der erfahrungsmäſsigen mittleren Erddichte verträglich wird. Wir verweisen dieserhalb auf die zusammenfassende Darstellung von Tisserand*), dessen Bericht indessen hinzuzufügen ist, daſs neuerdings E. Wiechert**) die sämtlichen einschlägigen astronomischen, geodätischen und physikalischen Daten zu einer bemerkenswerten Theorie des Erdinneren zu-

*) Tisserand, Mécanique céleste, t. 2, chap. XIV, insbesondere art. 110—112.

**) E. Wiechert, Die Massenverteilung im Innern der Erde, Göttinger Nachrichten 1897, pag. 221. Vgl. auch G. H. Darwin, Monthly Notices of the R. Astr. Soc. London. Vol. 60 (1899) Nr. 2. Die Ergebnisse von Wiechert und Darwin werden verglichen von F. R. Helmert, Sitzungsberichte der Akademie d. Wiss. Berlin 1901, p. 328.

sammengearbeitet hat, auf welche bereits wiederholt Bezug genommen wurde. In dieser Theorie wird die Erddichte als sprungweise veränderlich angesetzt, die Erde nämlich als aus einem dichteren Metallkern und einem weniger dichten Gesteinsmantel bestehend angenommen, welche von einander durch eine zähflüssige Zwischenschicht getrennt werden. Die Gröfsen- und Massenverhältnisse von Kern und Mantel lassen sich dabei so bestimmen, dafs sowohl die Massen- wie die Oberflächenelliptizität richtig herauskommen und dafs die Oberfläche des Mantels genau und die Oberfläche des Kernes nahezu dem spannungsfreien hydrodynamischen Gleichgewicht entspricht. Wir erwähnen diese Arbeiten hier, um begreiflich zu machen, dafs durch geeignete Annahmen über die Massenverteilung der theoretische Grenzwert $1/231$ thatsächlich in den beobachteten Wert der Massenelliptizität $1/304$ sowie in den beobachteten Wert der Abplattung übergeführt werden kann, dafs sich also insbesondere die Massenelliptizität wegen der Inhomogenität der Erde im Verhältnis $231/304$ verkleinert. In dem umgekehrten Verhältnis mufs sich dann die der starren Konstitution entsprechende Nutationsperiode, die ja der Massenelliptizität umgekehrt proportional war, vergröfsern und es liegt nahe anzunehmen, dafs sich in eben diesem Verhältnis auch die der wirklichen elastischen Konstitution entsprechende Nutationsperiode gegenüber demjenigen Wert, den sie bei homogener Massenverteilung theoretisch haben würde, vergröfsert. Diese Annahme lag unserer obigen Erklärung der Chandlerschen Periode stillschweigend zu Grunde, bei der wir nicht von der für homogene Massenverteilung gültigen Nutationsperiode $1/\varepsilon_1 = 231$, sondern von der wegen der Inhomogenität gröfseren Eulerschen Periode von 304 Tagen ausgingen, die wir alsdann wegen der Elastizität der Erde mit dem aus den theoretischen Werten von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ berechneten Vergröfserungsverhältnis $1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1$ multiplizierten. Auch in der oben zitierten Arbeit von Hough wird mangels anderweitiger sicherer Unterlagen die gleiche Annahme gemacht.

Dabei soll nicht geleugnet werden, dafs unsere Resultate sich ursprünglich auf ein homogenes Ellipsoid bezogen und dafs ihre Übertragung auf die inhomogene Erde notwendig mit einiger Unsicherheit verbunden ist.

Diese Unsicherheit betrifft aber nur die quantitativen Angaben, nicht die qualitativen. Es ist wohl möglich, dafs man bei Berücksichtigung der inhomogenen Dichtigkeitsverteilung im Erdinnern für den durchschnittlichen Elastizitätsmodul der Erde einen etwas anderen Zahlenwert finden möchte, als den oben angegebenen. Dagegen bleibt das allgemeine Resultat, dafs die Periode der freien Nutation durch

die Elastizität der Erde verlängert wird und dafs für einen gewissen Grad der Nachgiebigkeit die Eulersche in die Chandlersche Periode übergeht, bei einem beliebigen Gesetz der Massenverteilung und bei beliebiger Struktur des Erdinneren zuversichtlich bestehen.

Zum vollen Verständnis der Polschwankungen (oder genauer gesagt, des 14-monatlichen Bestandteils derselben) wird es beitragen, wenn wir schliefslich noch die im vorigen Kapitel, § 8, gegebene allgemeine Schilderung der Bewegung eines deformierbaren Kreisels auf die Verhältnisse der Erde übertragen.

Bei normaler Lage der Rotationsaxe, wo dieselbe mit der polaren Hauptträgheitsaxe zusammenfällt, rotiert die Erde gleichförmig um diese Axe mit der Abplattung 1/298. Der Unterschied des äquatorialen und des polaren Erdradius beträgt dabei $R/298$, wo $R$ den mittleren Erdradius bedeutet, oder rund 21 km. Jetzt werde die Rotationsaxe durch irgend welche Umstände abgelenkt. Die Elliptizität der Erde bleibt dabei dieselbe (vgl. pag. 603), nicht aber die Lage der Hauptträgheitsaxen (vgl. Fig. 90 auf pag. 602). Die Erdmasse weicht nämlich bei festgehaltener Form des Erdellipsoides nach der Seite der abgelenkten Rotationsaxe hin aus. Dabei stellt sie sich aber nicht symmetrisch um die Rotationsaxe selbst ein, sondern um eine Axe, die augenblickliche Hauptträgheitsaxe, die zwischen der ursprünglichen Hauptträgheitsaxe und der augenblicklichen Rotationsaxe liegt. Und zwar teilt diese Axe den Winkel ($\delta$ in Fig. 90) zwischen der ursprünglichen Hauptträgheitsaxe und der augenblicklichen Rotationsaxe nach Gl. (6) von pag. 603 im Verhältnis $\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')$. Da $\varepsilon' = \varepsilon_1 - \varepsilon$ war, kann das genannte Verhältnis auch geschrieben werden: $1 - \varepsilon/\varepsilon_1$. Nun bestimmte $1/\varepsilon$ die Dauer der Chandlerschen, $1/\varepsilon_1$ die der Eulerschen Periode. Mithin wird

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{10}{14} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{2}{7}.$$

Ist $e$ die Ablenkung des augenblicklichen Rotationspoles auf der Erdoberfläche, so ist die Ablenkung des augenblicklichen Trägheitspoles $2e/7$. Aus den Beobachtungen entnahmen wir pag. 677, dafs $e$ im Mittel 4 m beträgt; die Ablenkung des Hauptträgheitspoles wird daher nur 1,1 m. Würde der augenblickliche Rotationspol einfach einen Kreis vom Radius 4 m in 14 Monaten um den ursprünglichen Hauptträgheitspol, den geometrischen Pol, beschreiben, so müfste der augenblickliche Trägheitspol in derselben Zeit und im gleichen Umlaufssinne einen Kreis vom Radius 1,1 m um denselben Mittelpunkt durchlaufen.

Die Verrückung, die ein Punkt der Erdoberfläche hierbei erfährt, und die zum Teil in einer Hebung zum Teil in einer Senkung bestehen

wird, ist äufserst gering. Wir können sie aus Gl. (3) und (5) von pag. 601 und 602 unmittelbar entnehmen. In Gl. (3) bedeutet $r$ denjenigen Abstand, den ein Punkt auf der Oberfläche des Sphäroides vom Mittelpunkte desselben bei der normalen Umdrehung $\omega$ um die ursprüngliche Hauptträgheitsaxe hat; Gl. (5) giebt denselben Abstand bei abgelenkter Rotationsaxe. Die Differenz beider stellt die Verrückung des Punktes infolge der Deformation des Sphäroides dar; sie beträgt, wenn wir den früher mit $m$ bezeichneten Radius durch den mittleren Erdradius ersetzen und die Winkelablenkung $\delta$ als kleine Gröfse behandeln:

$$(3) - (5) = R\varepsilon'(\cos^2\Theta - \cos^2(\Theta + \delta)) = R\varepsilon'\delta \sin 2\Theta.$$

In Fig. 90, pag. 602 wird diese Gröfse durch die Dicke desjenigen Streifens dargestellt, welchen die Umrifsellipse in der deformierten, um $\vartheta$ verdrehten Lage von der ursprünglichen Umrifsellipse abschneidet. Die gröfste Verrückung findet nach Fig. 90 und der vorangehenden Formel für $\Theta = 45^0$ statt, wo $\sin 2\Theta = 1$ wird. Für diese Breite können wir, indem wir noch $R\delta$, die auf der Erdoberfläche gemessene Ablenkung des Rotationspols, mit $e$ bezeichnen, die Verrückung darstellen durch

$$\varepsilon' e = (\varepsilon_1 - \varepsilon)\, e = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right) e = \frac{1}{804}\left(1 - \frac{10}{14}\right) e < e \cdot 10^{-3}.$$

Da $e$ nur 4 m betrug, so wird die gröfste Verrückung eines Punktes an der Erdoberfläche kleiner als 4 mm.

Mit der Kleinheit dieser Verrückung hängt auch die Geringfügigkeit der Lotschwankung zusammen, die durch die Deformation der Erde hervorgerufen wird. Wir bestimmen einerseits nach Gl. (3), andrerseits nach Gl. (5) von pag. 601 und 602 den Winkel, welchen die Normale an das Erdellipsoid mit der Verbindungslinie des fraglichen Ortes nach dem Mittelpunkte der Erdfigur hin bildet. Dieser Winkel ist (bei Vertauschung von Winkel und Tangente):

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\Theta}$$

und wird in erster Näherung

$$\text{nach (3)} \cdots -(\varepsilon + \varepsilon') \sin 2\Theta,$$
$$\text{nach (5)} \qquad -\varepsilon \sin 2\Theta - \varepsilon' \sin 2(\Theta + \delta).$$

Der Unterschied beider Winkel, welcher gleich der Richtungsänderung der Lotlinie ist, ergiebt sich daher zu

$$\varepsilon'(\sin 2(\Theta + \delta) - \sin 2\Theta) = 2\varepsilon'\delta \cos 2\Theta.$$

Die gröfste Lotschwankung findet hiernach in Übereinstimmung mit Fig. 90 für $\Theta = 0$ und $\pi/2$, d. h. an den Polen und am Äquator statt und beträgt

$$\pm 2\varepsilon'\delta.$$

Da soeben $\varepsilon' < 10^{-8}$ gefunden wurde, so wird die gröfste Lotschwankung kleiner als der 500$^{te}$ Teil der Ablenkung der Rotationsaxe. Da letztere nach Fig. 104 von pag. 676 kleiner als 0″,3 war, so wird die Lotablenkung jedenfalls kleiner als 0″,0006, eine Gröfse, die der Beobachtung unter keinen Umständen zugänglich sein dürfte. —

Endlich möge noch auf den Einflufs hingewiesen werden, den das Wasser der Ozeane auf die Länge der Nutationsdauer möglicherweise ausüben kann. Wäre die Erdoberfläche völlig mit Wasser bedeckt, so würde sich dieses, da es dem Einflufs der Centrifugalkräfte frei zu folgen vermag, symmetrisch rings um die augenblickliche Rotationsaxe einstellen. Wir hätten dann im Anschlufs an Fig. 90 zu unterscheiden: die Oberfläche der Flüssigkeit, welche bei einer Ablenkung der Rotationsaxe um den vollen Winkel $\delta$ gegen ihre ursprüngliche Lage verdreht wird, und die Oberfläche des festen Erdkernes, welche nur um den pag. 603 bestimmten Bruchteil von $\delta$ nach der Seite der Rotationsaxe verschoben wird. Die ausgiebigere Ablenkung der Flüssigkeitsoberfläche würde die Dauer der freien Nutation ihrerseits verlängern; es würde daher ein Teil der Abweichung zwischen der Chandlerschen und der Eulerschen Periode durch das Verhalten der Flüssigkeitsbedeckung erklärt werden müssen und nur der Rest auf die Elastizität der Erde kommen. Die Nachgiebigkeit der Erde würde sich auf diese Weise noch kleiner oder ihr durchschnittlicher Elastizitätsmodul noch gröfser ergeben, als er oben gefunden wurde, wo wir jene ganze Abweichung auf Rechnung der Elastizität der Erde setzten. In Wirklichkeit wird nun aber die Erdoberfläche nicht vollständig, sondern nur etwa zu $^{2}/_{3}$ von Wasser bedeckt und die Beweglichkeit des Wassers wird in komplizierter Weise durch die Form der Kontinente beschränkt. Deshalb dürfte es kaum thunlich sein, den Einflufs der Ozeane auf die Nutationsperiode der Erdaxe a priori einwandsfrei abzuschätzen. Vielmehr wird man abwarten müssen, bis ein reichlicheres Beobachtungsmaterial über die den Polschwankungen entsprechenden Wasserbewegungen vorliegt. Bereits auf pag. 684 wurde auf die Flutwellen von 14-monatlicher Periode hingewiesen; wenn die Existenz derselben sicher festgestellt und ihre Gröfse ungefähr bestimmt ist, wird die Aufgabe entstehen, auch den Einflufs dieser Fluten auf das Problem der freien Nutationen der Erdaxe anzugeben.

## § 8. Die Polschwankungen von jährlicher Periode. Massentransporte und Flutreibung.

Mit der Erklärung der Chandlerschen Periode ist nur eine Seite des Problems der Polschwankungen erledigt. Es wäre weiter zu be-

gründen, warum neben jener eine jährliche Periode, die wir aus den Fig. 105 a und b von pag. 680, 681 herauslasen, auftritt und warum auch nach Abzug der Schwankungen dieser Periode ein Restbetrag übrig bleibt (Fig. 106 von pag. 683) von scheinbar gesetzlosen, zufälligen Störungen. Überhaupt verdient die Frage alle Beachtung, weshalb die freien Nutationen der Erdaxe so kompliziert und teilweise regellos ausfallen, während doch die erzwungenen Nutationen (vgl. § 3 dieses Kapitels) sich streng gültigen mathematischen Gesetzen fügen.

Der Grund hiervon scheint darin zu liegen, dafs die Erde im Sinne des vorigen § zwar *effektiv fest*, aber nicht *wirklich fest* ist, dafs sich vielmehr ihre Teile bis zu einem gewissen Grade gegeneinander verschieben können. Insbesondere legt das Vorhandensein der jährlichen Periode die Annahme nahe, dafs solche Verschiebungen oder „Massentransporte“ durch die Sonnenwärme bedingt werden, also meteorologischen Ursprungs sein mögen. Man hat verschiedene meteorologische Einflüsse zur Erklärung der jährlichen Polschwankungen herangezogen, so den jährlichen Wechsel in den Schnee- und Eisablagerungen, Meeresströmungen von jährlicher Periode und dadurch bedingte Wassertransporte, sowie Schwankungen in dem Niveau des Luftmeeres. Die letzteren scheinen sich auf Grund der für den gröfsten Teil der Erde bekannten Isobarenkarten am ehesten quantitativ bestimmen zu lassen und liefern Massenumlagerungen von überraschend hohem Betrage.

Wir entnehmen die folgenden Angaben einer Untersuchung von R. Spitaler*). Bekanntermafsen ist der Luftdruck im Winter im Mittel höher als im Sommer. Daher wird die Luftdruckdifferenz zwischen Januar und Juli auf der nördlichen Halbkugel im Mittel positiv, auf der südlichen negativ sein. Die Verteilung der Druckdifferenzen ist dabei natürlich keine gleichförmige, sondern wesentlich verschieden, je nachdem die betr. Gegend Festland oder Ozean ist, und zwar in dem Sinne verschieden, dafs die Wasserbedeckung die Luftdruckschwankungen merklich ausgleicht. In Übereinstimmung mit dieser Überlegung zeigen die Isobarenkarten, dafs sich der Drucküberschufs zwischen Januar und Juli auf der nördlichen Halbkugel über dem asiatischen Festlande konzentriert, während sich der Drucküberschufs zwischen Juli und Januar auf der südlichen Halbkugel inselförmig über die drei Gebiete: Südafrika, Südamerika, Australien gruppiert. Über die Polargegenden ist naturgemäfs nichts Sicheres bekannt. Hinsichtlich der Gröfse der

*) Die periodischen Luftmassenverschiebungen und ihr Einflufs auf die Lagenänderungen der Erdachse. Petermanns Mitteilungen, Ergänzungsheft Nr. 137 (1901).

Druckdifferenzen lehrt die Ausmessung der Isobarenkarten Folgendes: Es lagert auf der nördlichen Halbkugel zwischen 0° und 80° nördlicher Breite im Januar ein Luftmassenüberschufs gegenüber Juli gleich 192,5 Kubikkilometer Quecksilber, auf der südlichen Halbkugel zwischen 0° und 50° südlicher Breite im Juli ein Massenüberschufs gegenüber Januar von 402,2 Kubikkilometer Quecksilber! Da ein Kubikkilometer Quecksilber die Masse $13{,}6 \cdot 10^{12}$ kg aufweist, so haben wir es hier mit Massenunterschieden zu thun, die mit der gesamten Erdmasse (gleich mittlerer Dichte mal $4\pi R^3/3 =$ rund $6 \cdot 10^{24}$ kg) schon einigermafsen vergleichbar sind*).

Hinsichtlich der durch Meeresströmungen verursachten Massentransporte verweisen wir auf eine Abschätzung von J. Lamp**).

Aufser durch meteorologische Einflüsse finden Massentransporte von kurzer Periode infolge von Ebbe und Flut und unperiodische Massenverschiebungen wenn auch von geringem Betrage durch Erdbeben, vulkanische Ausbrüche, Ablagerungen der Flüsse und durch die säkularen Hebungen und Senkungen der Erdkruste statt***).

Wir haben uns nun zu fragen, wie solche Massentransporte die Bewegung der übrigen Erde beeinflussen. Wir können dabei einen *indirekten* und einen *direkten Einflufs* unterscheiden, einen indirekten, durch die veränderte Massenverteilung vermittelten Einflufs, indem durch einen Massentransport die Hauptträgheitsaxen der Erde verlegt werden und somit die Lage der Rotationsaxe in der Erde beeinflufst wird, einen direkten Einflufs, insofern die Hervorbringung der Massentransporte einen Teil des zur Verfügung stehenden Gesamtimpulses verbraucht und dadurch den für die Erdrotation übrig bleibenden Impuls nach Gröfse und Richtung modifiziert.

Wir geben zunächst eine allgemeine Schilderung der fraglichen Verhältnisse.

Um den *indirekten Einflufs* eines Massentransportes zu bestimmen,

---

*) Die entsprechenden Luftdruckdifferenzen sind keineswegs grofs. Denken wir uns z. B. die Gesamtmasse von 192,5 km³ Quecksilber auf die Kugelzone zwischen 0° und 80° nördlicher Breite gleichmäfsig verteilt, so ergiebt sich eine Bedeckung von nur 0,78 mm Höhe. Dem genannten Massenüberschufs auf der nördlichen Kugelzone entspricht daher ein im Januar um 0,78 mm höherer Barometerstand als im Juli. Ebenso entspricht dem Massenüberschufs von 402,2 km³ Quecksilber auf der genannten südlichen Kugelzone ein im Juli um 2,08 mm höherer mittlerer Barometerstand als im Januar.

**) Über Niveauschwankungen der Ozeane als eine mögliche Ursache der Veränderlichkeit der Polhöhe. Astron. Nachrichten 126 (1891), Nr. 3014.

***) Näheres hierüber vgl. Helmert, Die mathem. und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, II, Kap. 5, Leipzig 1884.

verfahre man so: Man berechne aus der als bekannt anzusehenden Lage der bewegten Masse gegen den Erdkörper in jedem Momente die Lage der Hauptträgheitsaxen in der Erde und insbesondere die Lage des Trägheitspoles. Wenn letzterer vor dem Massentransport zufälliger Weise mit dem instantanen Rotationspol zusammenfiel, wird er während desselben und nach demselben von diesem verschieden sein. Gestattet man sich, was mit großer Annäherung zulässig ist, die Erde nach wie vor als symmetrischen Kreisel (mit gleichen äquatorialen Trägheitsmomenten) zu behandeln, so besteht die Bewegung des Rotationspoles auch nach dem Massentransport aus einer Umkreisung des Trägheitspoles. Die Periode dieser Bewegung ist — unter Voraussetzung der früher berechneten Elastizität — die vierzehnmonatliche. Der Radius des Kreises hängt dabei in erster Linie von der Verrückung des Trägheitspoles, in zweiter Linie von der Geschwindigkeit des Massentransportes ab; er bleibt theoretisch solange erhalten, bis er durch neue Massentransporte abgeändert wird.

Bei der Besprechung des *direkten Einflusses* der Massentransporte auf den Impuls wollen wir annehmen, daß unser Massentransport durch innere Kräfte hervorgerufen sei, also durch Kräfte, die innerhalb des Massensystems der Erde dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen. Dann gilt unser fundamentaler Impulssatz von pag. 113 für die nichtfeste Erde ebenso unumschränkt wie für einen starren Körper (vgl. eine Bemerkung auf pag. 111). Dieser Satz besagt, daß der Gesamtimpuls des Massensystems der Erde nach Richtung und Größe im Raume konstant bleibt. Der Gesamtimpuls zerlegt sich aber hier in den Impuls des Massentransportes und den der Erdrehung. Ist der erstere veränderlich, so muß es auch der letztere sein. Mit dem Impuls der Erddrehung ändert sich im Allgemeinen auch die Rotationsaxe der Erde und die Lage des instantanen Pols auf der Erde. Fiel dieser vor dem Massentransport mit dem geometrischen Pol zusammen, so wird er während desselben von ihm entfernt; bewegte er sich ursprünglich in einem Kreise um den geometrischen Pol, so wird der Radius dieses Kreises durch den Massentransport vergrößert oder verkleinert.

Wir geben nun einige analytische Ausführungen hierzu, wobei wir die beiden unterschiedenen Einflüsse zunächst noch getrennt behandeln und den Stoff in eine Reihe von Einzelproblemen auseinanderlegen.

*Erstes Problem: Eine Masse oder der Schwerpunkt eines nicht zu ausgedehnten Massensystems m werde von der Stelle $X_0\, Y_0\, Z_0$ der Erde nach der Stelle $X\, Y\, Z$ verlagert. Wie ändert sich dabei die polare Hauptträgheitsaxe?*

Bei der ursprünglichen Lage von $m$ seien die Koordinatenaxen Hauptträgheitsaxen. Die Hauptträgheitsmomente heifsen $A$, $B = A$, $C$; die Trägheitsprodukte (vgl. pag. 98) sind Null. Bei der abgeänderten Lage von $m$ setzen wir die Trägheitsmomente und -Produkte um die Koordinatenaxen in folgender Form an:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + a, \quad & \bar{B} &= A + b, \quad & \bar{C} &= C + c, \\ \bar{E} &= \phantom{A+{}} e, \quad & \bar{F} &= \phantom{A+{}} f, \quad & \bar{G} &= \phantom{C+{}} g. \end{aligned}$$

Die Gröfsen $a, \ldots, e, \ldots$ haben die Bedeutung

$$(1) \qquad \begin{cases} a = m(Y^2 + Z^2 - Y_0^2 - Z_0^2), \ldots \\ e = m(YZ - Y_0 Z_0), \ldots \end{cases}$$

und sind im Verhältnis zu $A$ und $C$ als kleine Gröfsen zu behandeln. Bei der Bestimmung der abgeänderten Lage der Hauptträgheitsaxen knüpfen wir nach pag. 100 an die folgende Fläche zweiten Grades an:

$$(A + a)\xi^2 + (A + b)\eta^2 + (C + c)\zeta^2 - 2e\eta\zeta - 2f\zeta\xi - 2g\xi\eta = 1.$$

Die Hauptaxen derselben, welche zugleich die gesuchten Hauptträgheitsaxen sind, werden durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} (A + a - \lambda)\xi - g\eta - f\zeta &= 0, \\ -g\xi + (A + b - \lambda)\eta - e\zeta &= 0, \\ -f\xi - e\eta + (C + c - \lambda)\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Hierin ist $\lambda$ so zu wählen, dafs die drei Gleichungen miteinander verträglich werden. Ist dieses geschehen, so bestimmen die Verhältnisse $\xi : \eta : \zeta$ die Lage je einer der drei Hauptaxen. Es ist für das Folgende bequem, die $\xi, \eta, \zeta$ als die Richtungskosinus der fraglichen Hauptaxe aufzufassen, ihre absolute Gröfse also so zu wählen, dafs $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ wird.

Wir interessieren uns speziell für die polare Hauptträgheitsaxe und dürfen annehmen, dafs diese nur wenig von ihrer ursprünglichen Richtung, der $Z$-Axe abweicht. (Für die äquatorialen Hauptträgheitsaxen wäre die entsprechende Annahme unzulässig, weil ihre Lage in der Äquatorebene ursprünglich unbestimmt ist und daher durch einen kleinen Massentransport bedeutend abgeändert werden kann.) Wir werden also $\xi$ und $\eta$ als klein voraussetzen und $\zeta$ gleich 1 nehmen. Gröfsen wie $f\xi$, $a\xi$ sind dann zu streichen; unsere dritte Gleichung ergiebt daher einfach $\lambda = C + c$ und unsere beiden ersten Gleichungen werden

$$(2) \qquad (A - C)\xi = f, \quad (A - C)\eta = e.$$

Die Richtungsänderung der fraglichen Hauptaxe ist hiernach auf Grund der in (1) angegebenen Werte von $f$ und $e$ bekannt. Die $\xi, \eta$ können

zugleich als die durch die zugehörigen geocentrischen Winkel gemessenen $x$ und $y$-Koordinaten des Trägheitspoles angesehen werden. Multiplizieren wir $\xi$ und $\eta$ mit dem Erdradius $R$, so erhalten wir direkt die Verschiebung des Trägheitspoles auf der Erdoberfläche.

Um ein Zahlenbeispiel zu geben, wollen wir annehmen, die Masse $m$ werde auf einem Meridian, den wir zur $XZ$-Ebene nehmen können, aus der Breite $\Theta_0$ in die Breite $\Theta$ verschoben. Es ist dann

$$e = 0, \quad f = \frac{mR^2}{2}(\sin 2\Theta - \sin 2\Theta_0), \quad \eta = 0.$$

Den Ausdruck (2) für $\xi$ können wir so umschreiben:

$$\xi = \frac{A}{A - C}\frac{f}{A}.$$

Die Gröſse $A$ würde bei homogener Massenverteilung durch $2MR^2/5$ zu berechnen sein, unter $M$ die Masse der Erde verstanden; der wirklichen Massenverteilung entspricht aber besser der Ansatz $A = MR^2/3$ *). Mit Benutzung des bekannten Zahlenwertes von $A/(C - A)$ folgt daraufhin

$$\xi = -456 \frac{m}{M}(\sin 2\Theta - \sin 2\Theta_0).$$

Um eine Ablenkung der Hauptträgheitsaxe um $1''$ hervorzubringen, ist hiernach, wenn z. B. $\Theta_0 = -45^0$, $\Theta = +45^0$ genommen wird, die folgende Masse erforderlich:

$$m = \frac{\pi M}{180 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 912} = \frac{1}{2}\, 10^{-8} M.$$

Natürlich schlägt der Pol in demselben Sinne aus wie die Massenverschiebung erfolgte.

*Zweites Problem: Es finde eine Massenverschiebung statt, deren Impuls nach Gröſse und Lage im Erdkörper durch einen ev. veränderlichen Vektor $\lambda\mu\nu$ für jede Zeit gegeben ist. Es wird angenommen, daſs die Hauptträgheitsaxen durch diese Massenverschiebung nicht abgeändert werden (s. unten). Welchen Einfluſs hat die Massenverschiebung auf die Lage der Rotationsaxe?*

Sehen wir von äuſseren Kräften ab und nehmen wir an, daſs der Massentransport lediglich durch innere Kräfte hervorgebracht wird, so bleibt der Gesamtimpuls im Raume konstant. Dieser hat gegen die bewegte Erde die Komponenten $L + \lambda$, $M + \mu$, $N + \nu$, wenn $LMN$ den Impuls der Erddrehung bezeichnet. Mithin gelten nach pag. 140 die Eulerschen Gleichungen in der folgenden Form:

---

*) Vgl. Helmert l. c. II, pag. 473.

$$\frac{d(L+\lambda)}{dt} = r(M+\mu) - q(N+\nu),$$
$$\frac{d(M+\mu)}{dt} = -r(L+\lambda) + p(N+\nu),$$
$$\frac{d(N+\nu)}{dt} = q(L+\lambda) - p(M+\mu).$$

Wir schreiben dafür

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = rM - qN + \mathsf{\Lambda}, \\ \dfrac{dM}{dt} = -rL + pN + \mathsf{M}, \\ \dfrac{dN}{dt} = qL - pM + \mathsf{N}, \end{cases}$$

indem wir setzen

$$\mathsf{\Lambda} = -\frac{d\lambda}{dt} + r\mu - q\nu,\quad \mathsf{M} = -\frac{d\mu}{dt} - r\lambda + p\nu,\quad \mathsf{N} = -\frac{d\nu}{dt} + q\lambda - p\mu.$$

Die Gröfsen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sind kleine Gröfsen; wir können daher in den vorstehenden Definitionsgleichungen die $p$, $q$, $r$ durch ihre Näherungswerte ersetzen, die sie bei ungestörter Erddrehung haben würden, d. h. durch die Werte $p = 0$, $q = 0$, $r = \omega$. Dadurch vereinfachen sich diese Gleichungen wie folgt:

$$(4)\qquad \mathsf{\Lambda} = -\frac{d\lambda}{dt} + \omega\mu,\qquad \mathsf{M} = -\frac{d\mu}{dt} - \omega\lambda,\qquad \mathsf{N} = -\frac{d\nu}{dt}.$$

Die $\mathsf{\Lambda}$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$ sind hiernach ebenso wie die $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bekannte Funktionen der Zeit und die Gleichungen (3) lassen die folgende Deutung zu: Unser Massentransport vom Impulse $\lambda\,\mu\,\nu$ beeinflufst die Erddrehung in solcher Weise, als ob eine als Funktion der Zeit gegebene Drehkraft $\mathsf{\Lambda}\,\mathsf{M}\,\mathsf{N}$ an dem Erdkörper angriffe.

Da wir annehmen, dafs die Lage der Hauptaxen durch den Massentransport nicht beeinflufst wird, diese also im Erdkörper festliegen, können wir in (3) $L = Ap$, $M = Aq$, $N = Cr$ setzen; aufserdem können wir in Gliedern, die mit den kleinen Faktoren $p$ oder $q$ behaftet sind, $r$ mit seinem Näherungswert $\omega$ vertauschen. Die beiden ersten Gleichungen (3) lauten dann:

$$(5)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (A - C)\omega q + \mathsf{\Lambda}, \\ A\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\omega p + \mathsf{M}. \end{cases}$$

Die dritte Gleichung kommt für das Folgende nicht in Betracht.

Wir fassen die Gl. (5) durch Multiplikation mit 1 und $i$ zu einer komplexen Gleichung

$$(6)\qquad A\frac{d(p+iq)}{dt} = (C - A)i\omega(p+iq) + \mathsf{\Lambda} + i\mathsf{M}$$

zusammen und nehmen von dem Massentransport an, dafs er ein periodischer sei, dafs also $\lambda$, $\mu$, $\nu$ und daher auch $\Lambda$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$ periodische Funktionen der Zeit sind. Diese Funktionen werden wir nach Vielfachen der Periode in eine Fouriersche Reihe entwickeln und ein einzelnes Reihenglied für sich betrachten. Für $\Lambda + i\mathsf{M}$ können wir dann ganz allgemein den Ansatz machen:

$$\Lambda + i\mathsf{M} = a e^{i\alpha t} + a' e^{-i\alpha t}.$$

Dem entspricht als allgemeines Integral von (6):

$$p + iq = b e^{i\alpha t} + b' e^{-i\alpha t} + c e^{i\beta t}, \tag{7}$$

wo $c$ die Integrationskonstante ist und wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left\{\begin{aligned} \beta &= \frac{C-A}{A}\omega, \\ b &= \frac{a}{i\alpha A - i\omega(C-A)} = \frac{ia}{A}\frac{1}{\beta-\alpha}, \\ b' &= \frac{a'}{-i\alpha A - i\omega(C-A)} = \frac{ia'}{A}\frac{1}{\beta+\alpha}; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$c$ ist ebenso wie vorher $a$ und $a'$ im Allgemeinen komplex. Die beiden ersten Glieder der rechten Seite von (7) stellen die durch den Massentransport *erzwungene* Schwingung, das letzte Glied die *freie* Schwingung der Rotationsaxe dar. Erstere erfolgt natürlich im Zeitmafs des Massentransportes, letztere in der durch den Wert von $\beta$ angezeigten Periode von $A/(C-A)$ Tagen. Setzen wir letztere nicht gleich der Eulerschen, sondern gleich der Chandlerschen Periode, so berücksichtigen wir damit in einfachster Weise im Sinne des vorigen Paragraphen die elastische Nachgiebigkeit der Erde, die sich natürlich auch an dieser Stelle geltend machen wird.

Wie überall bei Schwingungsfragen stofsen wir hier auf ein gewisses Resonanzphänomen, d. h. auf eine Verstärkung der Ausschläge im Falle der Koincidenz zwischen der Periode der freien und erzwungenen Schwingung. Diese Koincidenz tritt ein, wenn in unseren Bezeichnungen $\alpha = \pm\beta$ wird, in welchem Falle entweder $b$ oder $b'$ unendlich grofs wird. Wir messen die für eine gewisse Frequenz eintretende Verstärkung am besten durch den Vergleich mit einer sehr langsamen Schwingung ($\alpha = 0$). Nach (8) ergiebt sich für den Koeffizienten $b$ bei sehr geringer Frequenz bez. für das Verhältnis dieses Koeffizienten bei beliebiger und bei geringer Frequenz:

$$b_0 = \frac{ia}{A}\frac{1}{\beta}$$

und

$$\frac{b_\alpha}{b_0} = \frac{1}{1-\alpha/\beta}. \tag{9}$$

(Dieselbe Formel gilt für den Koeffizienten $b'$, wenn wir $+\alpha$ mit $-\alpha$ vertauschen; die folgenden Bemerkungen, die wir an den Wert von $b$ anknüpfen, ergeben sich ebensowohl aus der entsprechenden Formel für $b'$, wenn wir negative Frequenzen $\alpha$ betrachten, also dem Massentransport den umgekehrten Sinn beilegen.)

Hat z. B. der Massentransport die Periode eines Jahres und nehmen wir als Periode der freien Schwingung, wie verabredet, die Chandlersche, so wird $\alpha/\beta = 14/12$ und (vom Vorzeichen abgesehen) $b_\alpha/b_0 = 6$. *Der Umstand also, dafs die jährliche Periode nicht sehr weit von der natürlichen Periode der Polschwankungen entfernt ist, hat zur Folge, dafs ein Massentransport von jährlicher Periode eine sechsmal stärkere Ablenkung hervorbringt, als ein Vorgang, der dieselbe Drehkraft, aber in unendlich verlangsamter Zeitfolge auf die Erde überträgt.* Hat der Massentransport andrerseits eine sehr kurze Periode, ($\alpha$ sehr grofs), so wird $\alpha/\beta$ grofs und $b_\alpha/b_0$ klein. Z. B. wollen wir uns auf den an sich bedeutenden Massentransport beziehen, der relativ zur rotierenden Erde mit halbtägiger Periode in der Erscheinung der Ebbe und Flut auftritt*). Hierbei ist $\alpha/\beta$ rund gleich 840 und $b_\alpha/b_0$ rund gleich 1/840. *Ein Massentransport von so kurzer Periode bringt also bei gleicher Gröfse der übertragenen Drehkraft gegenüber einem zeitlich unendlich verlangsamten Transporte nur eine verschwindend kleine Wirkung auf die Rotationsaxe hervor.* Das Massensystem der Erde ist eben zu träge, um den Einwirkungen von ganz kurzer Dauer folgen zu können; es folgt einer Störung um so williger und ergiebiger, je näher die Störungsperiode der natürlichen Periode der Polschwankungen liegt.

Übrigens tritt dasselbe Resonanzphänomen auch auf, wenn wir wie in dem ersten Problem dieses § lediglich die indirekte Wirkung des Massentransportes, d. h. seinen Einflufs auf die Massenverteilung in Rechnung setzen, indem durch einen periodischen Massentransport auch der Trägheitspol der Erde in periodischer Weise verlagert wird und hieraus eine um so stärkere Schwankung des Rotationspoles entsteht, je näher die Periode des Massentransportes der natürlichen Periode der Polschwankungen liegt. Wir werden unten in einem dritten Problem hierauf zurückzukommen Gelegenheit haben.

Durch den geringen Unterschied zwischen der jährlichen Periode der meteorologischen Massentransporte und der freien Schwingungsperiode des Poles ist jedenfalls die Möglichkeit gegeben, dafs ein verhältnismäfsig schwacher meteorologischer Massentransport eine ver-

*) Allerdings handelt es sich hierbei um einen durch äufsere Kräfte (Mondanziehung) bewirkten Massentransport, für welchen die gegenwärtige Auseinandersetzung nicht unmittelbar gilt.

hältnismäfsig starke Polschwankung zur Folge haben kann, eine Möglichkeit, die bei dem Studium der Polschwankungen von jährlicher Periode im Auge zu behalten ist.

Es giebt eine Klasse von Massentransporten, bei denen die hier für sich behandelte Wirkung auf den Impuls thatsächlich gesondert auftritt und die Wirkung auf die Massenverteilung in Fortfall kommt. Wir sprechen von „cyklischen Massentransporten", wenn die verschobene Masse sofort von neuer Masse derselben Dichtigkeit ersetzt wird. Ersichtlich giebt ein cyklischer Massentransport zu einer Umlagerung der Hauptträgheitsaxen keinen Anlafs, während er andrerseits den Impuls der Erddrehung nach Mafsgabe seiner Geschwindigkeit und Ergiebigkeit beeinflufst. Diese Fälle lassen eine sehr elegante Behandlung besonders dann zu, wenn der Impuls des Massentransportes in Bezug auf den Erdkörper konstant bleibt; sie sind von V. Volterra*) in einer Reihe von Abhandlungen untersucht worden.

Bisher ist es indessen nicht gelungen, reale cyklische Massentransporte von hinreichender Intensität oder hinreichender Dauer nachzuweisen, die einen merklichen Einflufs auf die Polschwankungen haben könnten. Namentlich scheint der Versuch nicht aussichtsvoll, mit Volterra auch die Polschwankungen der Chandlerschen Periode aus diesem Erklärungsgrunde abzuleiten. Die cyklischen Bewegungen, welche Volterra postulieren mufs, um zur Chandlerschen Periode zu gelangen, sind rein hypothetischer Natur und werden durch die geophysikalischen Erfahrungen nicht wahrscheinlich gemacht. Überdies werden wir im Folgenden sehen, dafs die direkte Wirkung eines Massentransportes auf den Impuls gegen seine indirekte Wirkung auf die Hauptträgheitsaxen im Allgemeinen zurücktritt, dafs also ein nicht-cyklischer Massentransport die Erddrehung im Allgemeinen mehr beeinflufst, wie ein cyklischer von gleicher Stärke. Deshalb scheinen die Volterra'schen Untersuchungen mehr ein allgemeines mathematisches wie ein unmittelbares geophysikalisches Interesse zu haben.

Rein theoretisch, ohne Rücksicht auf geophysikalische Fragen, war die Bewegung eines Kreisels, in dessen Innerem eine cyklische Bewegung vor sich geht, schon früher von A. Wangerin**) behandelt worden.

---

*) Astronom. Nachr. Bd. 138 (1895), pag. 33; Atti d. R. Accademia di Torino, Bd. 30 und 31 (1895). In derselben Richtung liegen die Erläuterungen von G. Peano, ibid. Volterra fafst seine Untersuchungen zusammen in Acta Mathematica Bd. 22 (1898).

**) Halle 1899, Universitätsschrift. Das Problem ist in mathematisch verallgemeinerter Form aufgenommen von V. Volterra, Rend. d. R. Accademia dei Lincei (5) Bd. 4 (1895) und von E. Jahnke, Liouvilles Journal (5) Bd. 5 (1899).

Indem wir jetzt noch die bei unserem ersten und zweiten Problem gegebenen Entwickelungen zusammenfassen, berücksichtigen wir nun zugleich die direkte Wirkung auf den Impuls und die indirekte Wirkung eines Massentransportes auf die Massenverteilung der Erde. Wir stellen uns dementsprechend das folgende

*Dritte Problem: Eine Masse $m$ werde von einer Anfangslage $X_0\, Y_0\, Z_0$ aus in bestimmter Weise auf der Erde verschoben, so dafs ihre Koordinaten $X, Y, Z$ gegen den Erdkörper bekannte, im Besonderen periodische Funktionen der Zeit sind. Hierdurch wird der Trägheitspol der Erde in bestimmter Weise abgelenkt und es wird gleichseitig der Impuls der Erddrehung in solcher Weise beeinflufst, als ob auf den Erdkörper eine bestimmte Drehkraft $\mathsf{\Lambda\, M\, N}$ wirkte. Es sollen die Differentialgleichungen der Drehbewegung aufgestellt und integriert werden.*

Aus den als Funktionen von $t$ gegebenen Koordinaten $X, Y, Z$ von $m$ berechnen wir zunächst den Verschiebungsimpuls von $m$, nämlich den Vektor

$$mX',\quad mY',\quad mZ'$$

und hieraus die Momente dieses Vektors um die Koordinatenaxen, welche die nach denselben Axen genommenen Komponenten des Drehimpulses des Massentransportes werden, nämlich

$$(10)\quad \lambda = m(YZ' - ZY'),\quad \mu = m(ZX' - XZ'),\quad \nu = m(XY' - YX').$$

Die Bewegung des Erdkörpers wird, unter der Annahme dafs äufsere Kräfte nicht vorhanden sind, nach wie vor durch die Gleichungen (3) dargestellt, in denen die $\mathsf{\Lambda, M, N}$ aus den soeben angegebenen $\lambda, \mu, \nu$ hinreichend genau mittels der Gl. (4) berechnet werden können. In der That gelten die Gl. (3) von pag. 712 oder die Gl. (2') von pag. 140, aus denen wir jene folgerten, für ein beliebiges im Kreisel festes rechtwinkliges Axensystem, gleichviel ob dasselbe das System der Hauptträgheitsaxen ist oder nicht. Im Gegensatz zu den Betrachtungen bei unserem zweiten Problem sind unsere Koordinatenaxen jetzt nicht mehr Hauptträgheitsaxen; nehmen wir etwa an, dafs sie es zu Anfang der Bewegung waren, so verlieren sie diese Eigenschaft in dem Mafse, wie der Trägheitspol durch den Massentransport abgelenkt wird. Infolgedessen treten an die Stelle der einfachen Beziehungen $L = Ap, M = Aq, N = Cr$ die allgemeinen Gl. (2) von pag. 95 für den Zusammenhang zwischen Impuls- und Rotationsvektor, die wir mit Rücksicht auf die Definition der Gröfsen $a\,b\,c$, $e\,f\,g$ in Gl. (1) folgendermafsen schreiben können:

$$\begin{aligned} L &= (A + a)p - gq - fr,\\ M &= -gp + (A + b)q - er,\\ N &= -fp - eq + (C + c)r. \end{aligned}$$

Wir berücksichtigen, dafs die $a\,b\,c$, $e\,f\,g$, $p\,q$ kleine Gröfsen sind und können daher wie folgt vereinfachen:

$$L = Ap - fr, \quad M = Aq - er, \quad N = (C+c)r. \tag{11}$$

Diese Werte haben wir in die Gl. (3) einzutragen. Aus der dritten dieser Gleichungen folgt zunächst, dafs (im Gegensatz zu $r$ selbst) $dr/dt$ eine kleine Gröfse wird, was man übrigens auch daraus entnehmen konnte, dafs die ungestörte, ursprüngliche Bewegung in einer *gleichförmigen* Rotation $r = \omega =$ const. bestand. In den beiden ersten Gleichungen (3) vernachlässigen wir ferner alle diejenigen Glieder, die von der zweiten Ordnung in den kleinen Gröfsen werden und ersetzen in den Gliedern erster Ordnung $r$ durch seinen Näherungswert $\omega$. So ergiebt sich

$$\begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (A-C)q\omega + \Lambda', \\ A\dfrac{dq}{dt} = (C-A)p\omega + \mathsf{M}', \end{cases} \tag{12}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{cases} \Lambda' = \omega\dfrac{df}{dt} - \omega^2 e + \Lambda, \\ \mathsf{M}' = \omega\dfrac{de}{dt} + \omega^2 f + \mathsf{M}. \end{cases} \tag{13}$$

Die Gleichungen (12) haben durchaus dieselbe Form, wie die Gl. (5); die $\Lambda'$, $\mathsf{M}'$ hier sind, ebenso wie die $\Lambda$, $\mathsf{M}$ dort, bekannte Funktionen der Zeit, wenn der Massentransport in seiner Abhängigkeit von der Zeit bekannt ist. Die $\Lambda'$, $\mathsf{M}'$ fassen die direkte Wirkung auf den Impuls und die indirekte Wirkung des Massentransportes zusammen und lassen sich abermals deuten als eine scheinbare, auf den Erdkörper wirkende Drehkraft. Bemerkenswert ist noch der folgende analytische Ausdruck dieser scheinbaren Drehkraft, der sich unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (4) und (13) von $\Lambda$, $\mathsf{M}$ und $\Lambda'$, $\mathsf{M}'$ ergiebt:

$$\begin{aligned} \Lambda' &= -\frac{d}{dt}(\lambda - \omega f) + \omega(\mu - \omega e), \\ \mathsf{M}' &= -\frac{d}{dt}(\mu - \omega e) - \omega(\lambda - \omega f). \end{aligned} \tag{14}$$

Man hat also, um neben der direkten die indirekte Wirkung des Massentransportes zu berücksichtigen, $\lambda$, $\mu$ einfach durch $\lambda - \omega f$, $\mu - \omega e$ zu ersetzen.

Die weitere Behandlung der Gl. (12), ihre Integration und die Diskussion ihrer Lösungen unterscheidet sich in nichts von der obigen Behandlung der Gl. (5); insbesondere findet auch jetzt die oben betonte Resonanzwirkung statt, wenn der Massentransport periodisch ist und

seine Periode der Periode der freien Schwingungen der Erdaxe nahe liegt.

Wir wollen hier zunächst die Frage entscheiden, ob bei einem periodischen Massentransport die direkte oder die indirekte Wirkung, d. h. die Wirkung auf den Impuls oder die auf die Massenverteilung die bedeutendere ist, um von da aus zu einer für die Zahlenrechnung nützlichen weiteren Vereinfachung der Gl. (12) zu gelangen. Wir brauchen zu dem Zwecke nach den Gleichungen (14) lediglich das Verhältnis der Gröfsenpaare $\lambda$, $\mu$ und $\omega f$, $\omega e$ zu prüfen.

Das Gesetz, nach welchem der Massentransport im Erdkörper zeitlich abläuft, möge durch die folgenden, möglichst bequem gewählten Gleichungen zum Ausdruck gebracht werden:

$$X = X_0 + a \sin \alpha t,$$
$$Y = Y_0 + b \sin \alpha t,$$
$$Z = Z_0.$$

Die fragliche Masse pendelt hiernach um ihre Anfangs- und Mittellage $X_0\, Y_0\, Z_0$ in der Periode $2\pi/\alpha$ herum. Wir berechnen nach (1):

$$e = m Z_0 b \sin \alpha t, \qquad f = m Z_0 a \sin \alpha t$$

und nach (10):

$$\lambda = - m Z_0 b \alpha \cos \alpha t, \qquad \mu = m Z_0 a \alpha \cos \alpha t.$$

Hiernach ergeben sich die Verhältnisse

$$\frac{\lambda}{\omega f} = - \frac{\alpha}{\omega} \frac{b}{a} \frac{\cos \alpha t}{\sin \alpha t}, \qquad \frac{\mu}{\omega e} = \frac{\alpha}{\omega} \frac{a}{b} \frac{\cos \alpha t}{\sin \alpha t}.$$

Über die Amplituden $a$ und $b$ wollen wir nichts Näheres aussagen; wir werden aber annehmen, dafs sie etwa von gleicher Gröfsenordnung sind. Dann wird die Gröfsenordnung der vorstehenden Verhältnisse im Mittel durch den Faktor $\alpha/\omega$ gegeben. Nun sind die Gröfsen $\alpha$ und $\omega$ umgekehrt proportional der Periode des Massentransportes bez. der der Erddrehung. $\alpha/\omega$ wird daher gleich der reziproken Anzahl von Tagen, welche auf die Periode des Massentransportes kommt. Wir sahen bereits, dafs nur Massentransporte von solcher Periode, die der natürlichen Periode der Polschwankungen nahe liegen, einen starken Einflufs auf die Polschwankungen ausüben können. Deshalb ist für alle Massentransporte die uns interessieren, $\alpha/\omega$ eine kleine Zahl, für die meteorologischen Massentransporte beispielsweise gleich $1/365$. Es folgt hieraus, dafs *bei diesen Massentransporten die direkte Wirkung gegenüber der indirekten sehr erheblich zurücktritt*, sodafs wir in den Gl. (14) $\lambda$ und $\mu$ gegen $\omega e$ und $\omega f$ streichen können. Gleichzeitig werden wir auch $df/dt$ gegen $\omega e$ und $de/dt$ gegen $\omega f$ streichen können, weil das Verhältnis dieser Gröfsenpaare der Gröfsenordnung nach aber-

mals durch den Wert $\alpha/\omega$ bestimmt wird. Die Gl. (14) vereinfachen sich auf Grund dieser Vernachlässigungen zu

$$\Lambda' = -\omega^2 e, \qquad \mathsf{M}' = +\omega^2 f,$$

wofür wir auch nach Gl. (2), indem wir die Winkelablenkungen der Hauptaxen einführen, schreiben können:

$$\Lambda' = -\omega^2(A-C)\eta, \qquad \mathsf{M}' = +\omega^2(A-C)\xi. \tag{15}$$

Diese Vereinfachung ist hier auf Grund einer sehr speziellen Annahme über den Massentransport abgeleitet. Man übersieht aber leicht, daſs auch bei allgemeinerem Ansatz, wenn man die $X, Y, Z$ je durch eine Fouriersche Reihe gibt, auf deren erste Glieder wir uns oben beschränkt haben, ähnliche Schlüsse möglich sein werden, daſs nämlich auch dann bei den Gliedern von langer Periode (d. h. lang gegen die Periode der Erdumdrehung) der durch die Änderung der Massenverteilung bedingte, indirekte Einfluſs überwiegt, während bei den Gliedern von kurzer Periode (d. h. kurz gegen die Periode der freien Schwingung der Erdaxe) sowohl der direkte Einfluſs auf den Impuls wie jener indirekte Einfluſs auf die Erddrehung unbedeutend wird. Nur bei stoſsweisen Massentransporten dürfte der direkte Einfluſs ausschlaggebend sein, wobei es allerdings zweifelhaft bleibt, ob solche Massentransporte von beträchtlicher Stärke in Wirklichkeit vorkommen.

Setzen wir die Werte (15) in unsere Differentialgleichungen (12) ein, so lauten dieselben:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{A-C}{A}\,\omega\,(q-\omega\eta), \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{C-A}{A}\,\omega\,(p-\omega\xi). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Hier wollen wir noch neben den Koordinaten $\xi$, $\eta$ des Trägheitspoles die ebenso zu messenden Koordinaten des Rotationspoles einführen, welche $u$, $v$ heiſsen mögen. Die $u$, $v$ sollen die Richtungskosinus der Rotationsaxe gegen die Koordinatenaxen $X$ und $Y$ bedeuten, also gleich sein $p/r$ bez. $q/r$, wofür wir auch hinreichend genau $p/\omega$ bez. $q/\omega$ nehmen können. Benutzen wir auſserdem wie in Gl. (8) für die Frequenz der freien Schwingung der Erdaxe die Abkürzung $\beta$, so werden unsere Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\beta(v-\eta), \\ \frac{dv}{dt} &= +\beta(u-\xi). \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Sie besagen einfach, *daſs der Rotationspol in jedem Augenblicke um den Trägheitspol mit der Winkelgeschwindigkeit $\beta$ umgedreht wird.* Der

Sinn der Drehung stimmt mit dem der Erddrehung überein; das Koordinatensystem ist so gewählt zu denken, dafs die positive $X$-Axe auf kürzestem Wege in die positive $Y$-Axe durch die Erddrehung übergeführt wird.

Zum Zwecke der Integration fassen wir die Gl. (17) in die komplexe Form zusammen:

$$\frac{d(u+iv)}{dt} = i\beta((u+iv)-(\xi+i\eta)) \tag{18}$$

und nehmen an, dafs infolge von Massentransporten der Trägheitspol eine elliptische Schwingung um seine mittlere Lage ausführe. Wir können dann für $\xi + i\eta$ ähnlich wie früher für $\Lambda + iM$ den Ansatz machen:

$$\xi + i\eta = ae^{i\alpha t} + a'e^{-i\alpha t}. \tag{19}$$

Dem entspricht als zugehöriges partikuläres Integral von (18), welches die durch den Massentransport *erzwungene* Schwingung des Rotationspols darstellt (von der *freien*, in der Periode $2\pi/\beta = 14$ Monaten erfolgenden Schwingung können wir absehen):

$$\begin{cases} u + iv = be^{i\alpha t} + b'e^{-i\alpha t}, \\ b = \dfrac{a\beta}{\beta-\alpha}, \quad b' = \dfrac{a'\beta}{\beta+\alpha}. \end{cases} \tag{20}$$

Gl. (20) stellt ebenso wie (19) eine elliptische Schwingung dar. Um die gegenseitige Lage und Gröfse beider Ellipsen bequem zu übersehen, können wir die Koordinatenrichtungen so gewählt denken, dafs sie mit den Hauptaxen der Ellipse (19) zusammenfallen. Dann sind $a$ und $a'$ und nach (20) auch $b$ und $b'$ reell. Nennen wir die Hauptaxen der beiden Ellipsen bez. $h, k, H, K$, so können wir statt (19) und (20) schreiben:

$$\xi + i\eta = h\cos\alpha t + ik\sin\alpha t, \quad h = a + a', \quad k = a - a', \tag{19'}$$

$$u + iv = H\cos\alpha t + iK\sin\alpha t, \quad H = b + b', \quad K = b - b'. \tag{20'}$$

Man erkennt hieraus, dafs der Richtung nach die Hauptaxen beider Ellipsen zusammenfallen; was ihre Gröfse betrifft, so ergiebt sich aus (20) und der Definition der $h, k, H, K$:

$$H = \frac{\beta(\beta h + \alpha k)}{\beta^2 - \alpha^2}, \quad K = \frac{\beta(\beta k + \alpha h)}{\beta^2 - \alpha^2}. \tag{21}$$

Es ist dabei zu beachten, dafs die $H, K$ mit Vorzeichen zu rechnen sind und dafs man auch der Gröfse $h$ ev. das negative Vorzeichen beizulegen hat, um erforderlichenfalls den richtigen Umlaufssinn des Trägheitspoles durch (19') zum Ausdruck zu bringen. Die Umkehrung der Gl. (21) liefert

$$h = H - \frac{\alpha}{\beta}K, \quad k = K - \frac{\alpha}{\beta}H. \tag{22}$$

Es mögen zunächst einige Zahlenbeispiele und Figuren folgen. Wir nehmen dabei an, daſs der fragliche Massentransport meteorologischen Ursprungs sei, also die Periode eines Jahres habe. Als Periode der freien Schwingung sehen wir, um der Elastizität des Erdkörpers Rechnung zu tragen (vgl. pag. 713), die Chandlersche an. Dann wird rund $\alpha/\beta = 7/6$. Der Trägheitspol möge eine geradlinige Schwingung ausführen, es sei also z. B. $h = 0$ und $\eta = k \sin \alpha t$. Aus (21) ergiebt sich

$$H = -\frac{42}{13}k = -3{,}2\,k; \qquad K = -\frac{36}{13}k = -2{,}8\,k$$

und aus (20')

$$u = -3{,}2\,k \cos \alpha t, \qquad v = -2{,}8\,k \sin \alpha t.$$

Dieser Fall wird durch Fig. 107a veranschaulicht. Wir haben dabei entsprechende, d. h. zu gleicher Zeit von dem Trägheitspol und dem Rotationspol inne gehabte Punkte mit gleichen Zahlen bezeichnet.

In Fig. 107b ist hinsichtlich der Bahn des Trägheitspoles an der vorigen Annahme festgehalten. Dagegen haben wir, wie es für einen

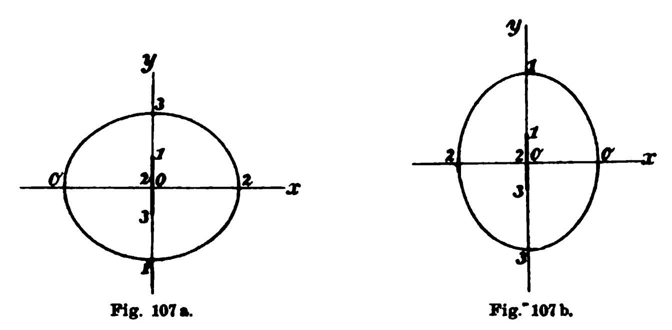



Fig. 107a. Fig. 107b.

absolut starren Erdkörper angemessen wäre, als Periode der freien Schwingungen die Eulersche gewählt. Es wird dann $\alpha/\beta = 5/6$ und

$$H = \frac{30}{11}k = 2{,}7\,k, \qquad K = \frac{36}{11}k = 3{,}3\,k,$$

$$u = +\,2{,}7\,k \cos \alpha t, \qquad v = +\,3{,}3\,k \sin \alpha t.$$

Beide Figuren 107 bringen die wiederholt hervorgehobene Resonanzwirkung zum Ausdruck, vermöge deren die Bewegung des Rotationspoles bei nicht sehr verschiedenen Perioden der freien und erzwungenen Schwingung wesentlich ausgiebiger wird, als die des Trägheitspoles. Daſs sich in Fig. 107a der Rotationspol auf der entgegengesetzten, in Fig. 107b auf derselben Seite wie der Trägheitspol befindet (entgegengesetzte bez. gleiche Phase hat), entspricht einem allgemeinen Schwingungsgesetz; entgegengesetzte Phase tritt stets im Falle $\alpha > \beta$, gleiche Phase im Falle $\alpha < \beta$ ein. Den Übergang zwischen beiden Ellipsen ver-

mittelt der Fall $\alpha = \beta$, wo unsere Ellipse (s. Gl. (21)) in einen Kreis von unendlich grofsem Radius übergeht. Im Falle $\alpha = 0$ (unendlich lange Periode, säkularer Massentransport) artet die elliptische in eine geradlinige Schwingung aus, indem (vgl. (21)) $H = 0$, $K = k$ wird; der Rotationspol folgt dann genau der Bahn des Trägheitspoles. Im Falle $\alpha = \infty$ (unendlich rasche Schwingung) vermag der Rotationspol der Einwirkung des Massentransportes überhaupt nicht zu folgen; es wird nach (21) $H = K = 0$. Denkt man sich in Fig. 107b die in eine Gerade ausgeartete Ellipse des Trägheitspoles durch eine kontinuierliche Folge von sich erweiternden Ellipsen, zu denen auch die in dieser Figur konstruierte Ellipse des Rotationspoles gehört, in den unendlichen Kreis übergeführt und in Fig. 107a diesen durch eine kontinuierliche Folge von sich verengernden Ellipsen, deren eine mit der in dieser Figur verzeichneten Ellipse übereinstimmt, in den Koordinatenanfangspunkt zusammengezogen, so hat man das Gesamtbild der möglichen Bahnen des Rotationspoles bei beliebigen Werten des Verhältnisses $\alpha/\beta$ vor sich.

So übersichtlich liegen indessen die Verhältnisse nicht mehr, wenn wir die Bahn des Trägheitspoles selbst als elliptisch ansetzen, also der soeben betrachteten geradlinigen Schwingung eine zweite dazu senkrechte und in der Phase gegen jene verschobene Schwingung hinzufügen. Dann kann es insbesondere vorkommen, dafs der Resonanzeffekt in gewisser Weise durch Interferenz verdeckt wird; die Mannigfaltigkeit der gegenseitigen Lagen beider Ellipsen, die nach den Gl. (21) möglich sind, wird dann aufserordentlich grofs. —

Nach Erledigung der vorangestellten drei Probleme kommen wir nun auf die bei der Erde vorliegenden realen Verhältnisse, insbesondere auf den im Anfang dieses Paragraphen besprochenen Luftmassentransport zurück. Wie Herr Spitaler auf Grund der Luftdruckkarten (durch mechanische Quadratur über die Erdoberfläche) berechnet, wird durch den Lufttransport der Trägheitspol abgelenkt

im Januar um 0″,055 nach 100° westl. v. Gr.
„ Juli „ 0″,041 „ 68° östl. v. Gr.

Der Trägheitspol schlägt also zu jenen beiden Zeitpunkten um annähernd gleiche Winkel nach annähernd entgegengesetzten Meridianen hin aus. Die Ausschläge für die Zeiten April und Oktober sind nicht berechnet, sondern nur geschätzt, sie erfolgen ungefähr nach den Meridianen 180° und 0° und sind vermutlich kleiner wie die vorher angegebenen. Der Trägheitspol läuft also in der Richtung von Osten nach Westen d. h. im umgekehrten Sinne wie die Erdrotation. Die genauere Gestalt der Bahn läfst sich nach diesen Daten nicht fest-

stellen und es ist daher auch nicht möglich, die zugehörige Bahn des Rotationspoles zu bestimmen.

Dagegen ist der umgekehrte Weg gangbar. Nach pag. 682 kann die Polschwankung von jährlicher Periode als eine Ellipse von den Hauptaxen 0″,104 und 0″,044 beschrieben werden, deren grofse Axe nach dem Meridian 19° östl. v. Gr. gerichtet ist und die im Sinne der Erddrehung durchlaufen wird. Wir setzen daher $H = 0'',104$, $K = 0'',044$ und berechnen nach den Gl. (22) mit $\alpha/\beta = 7/6$:

$$h = 0'',053, \quad k = -0'',077.$$

Die hierdurch bestimmte Ellipse wird (vermöge des Vorzeichens von $k$) im umgekehrten Sinne durchlaufen wie die vorige Ellipse; die Lage der grofsen und kleinen Axe ist die umgekehrte wie bei der vorigen Ellipse.

In Fig. 108 ist die Ellipse des Rotationspoles $H, K$ und die theoretisch hinzugehörige Ellipse des Trägheitspoles $h, k$ verzeichnet. Zusammengehörige Stellen beider sind durch gleiche Monatsbezeichnungen markiert. Ferner ist in der Figur die Lage des Trägheitspoles und sein Bewegungssinn nach den Berechnungen von Spitaler für die Zeiten Januar und Juli eingetragen. Die betr. Punkte sind als kleine Kreise kenntlich gemacht. Man erkennt aus der Figur, dafs eine allgemeine Übereinstimmung zwischen diesen Punkten und den theoretisch bestimmten gleichzeitigen Orten des Trägheitspoles wenigstens der Gröfsenordnung und dem Sinne nach vorhanden ist. Die thatsächlich bestehenden Unterschiede in ihren Lagen können entweder durch unsere noch ziemlich vollständige Unkenntnis der arktischen Luftdruckverhältnisse oder dadurch erklärt werden, dafs aufser den Lufttransporten noch andere meteorologische Prozesse (Wassertransporte etc.) die jährliche Bahn des Rotationspoles beeinflussen.

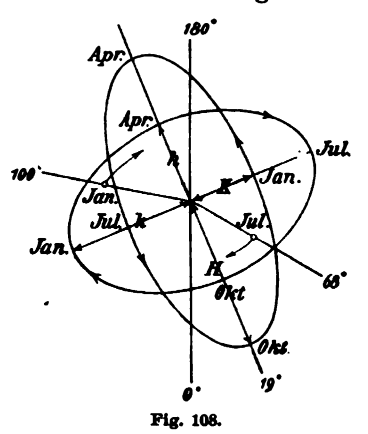


Fig. 108.

Alles in allem hat man zu der Annahme guten Grund, dafs es bei weiterer Anreicherung des Beobachtungsmaterials möglich sein wird, den jährlichen Bestandteil der Polschwankungen aus meteorologischen Massentransporten befriedigend zu erklären.

Nicht so günstig stehen die Aussichten für die Erklärung des in Fig. 106 dargestellten Restbetrages von unperiodischen Polschwankungen. Säkulare Massenveränderungen von einigermafsen wahrscheinlichem Betrage geben meist nur sehr kleine Einwirkungen auf den Trägheits-

und den Rotationspol*). Auch macht die allgemeine Gestaltung von Fig. 106, soweit wir derselben überhaupt reale Bedeutung zusprechen können, den Eindruck, als ob es sich bei den unperiodischen Polschwankungen mehr um kürzere Zeit anhaltende und dann im umgekehrten Sinne wirkende Störungen handelt.

Störungen dieses Charakters würden sich in unserer obigen Bezeichnung als direkte Einflüsse auf den Impuls der Drehbewegung ergeben, wenn eine Massenverschiebung auf der Erde ziemlich plötzlich eingeleitet wird und alsdann wieder zur Ruhe kommt, so daſs der Impuls der Massenverschiebung erst erzeugt und nachher wieder vernichtet wird und die korrespondierende Impulsänderung der Erddrehung zuerst im einen und alsdann im entgegengesetzten Sinne stattfindet. Da wir indessen durchaus keinen Anhalt zu der Annahme haben, daſs derartige Massenverschiebungen von hinreichender Stärke auf der Erde möglich sind, so halten wir es für nutzlos, die soeben angedeutete Vorstellung weiter auszuführen. —

Hinsichtlich der allgemeinen analytischen Entwickelungen dieses Paragraphen sei noch hervorgehoben, daſs die für die Behandlung des Erdkörpers von variabler Massenverteilung grundlegenden Gleichungen (3) unmittelbar aus unserer Auffassung der Eulerschen Gleichungen entspringen, auch für den Fall, wo die Koordinatenaxen nicht Hauptaxen des Erdkörpers sind oder bleiben. Unter Festhalten an den einmal gewählten Koordinaten gelangten wir dann durch bloſse Spezialisierung auf den besonderen vorliegenden Fall zu der einfachsten Gleichungsform (17). In der Litteratur wird das Problem am eingehendsten von G. H. Darwin**) behandelt. Darwin legt dabei als Koordinatenaxen nicht wie wir im Erdkörper feste Axen, sondern die im Erdkörper beweglichen jeweiligen Hauptaxen zu Grunde und kommt auf diese Weise ebenfalls zu den Endgleichungen (17). Die der Fig. 107b zu Grunde liegenden Rechnungen sind zuerst von R. Radau***) gegeben worden, weshalb die Ellipse jener Figur gelegentlich als Radau'sche Ellipse bezeichnet wird. Unter allgemeineren Voraussetzungen diskutiert F. R. Helmert†) den Zusammenhang zwischen der Ellipse des Trägheitspoles und des Rotationspoles.

Unsere Darstellung der Polschwankungen würde aber unvollständig sein, wenn wir nicht neben den hinsichtlich des Rotationspoles *centri-*

---

*) Vgl. Tisserand, Mécanique céleste II, Chap. 29, art. 208 und Chap. 30, art. 218.

**) G. H. Darwin: On the influence of Geological Changes on the Earth's Rotation. London, Phil. Trans. 167 (1877), mit einem Anhang von Lord Kelvin.

***) R. Radau, Comptes Rendus 111 (1890) und Bulletin Astronomique 7 (1890).

†) F. R. Helmert, Astronom. Nachr. 126 (1891), Nr. 3014.

*fugalen* Wirkungen der Massentransporte noch gewisse *centripetale* Tendenzen erwähnen würden, die durch Auftreten von Reibungseinflüssen veranlafst werden und die in gewisser Weise die Bewegung des Rotationspoles beruhigen und vereinfachen können, so wie jene dieselbe stören und komplizieren.

Wir denken in erster Linie an die Reibung, welche *Ebbe und Flut* mit sich bringt und zwar zunächst die gewöhnliche durch Mond- oder Sonnenanziehung hervorgebrachte. Schon Immanuel Kant hat 1754 das Vorhandensein einer solchen Reibung betont und hat daraus die Notwendigkeit einer säkularen Verlängerung des Sterntages abgeleitet. Wie diese Reibung im Einzelnen zustande kommt, brauchen wir hier nicht zu erörtern*); für unsere Zwecke genügt die folgende, etwas groteske Vorstellung: Auf der mit Wasser bedeckten Erdoberfläche sind an den diametralen Enden eines Durchmessers die beiden Flutberge angehäuft; die Erde rotiert unter ihnen fort, während die Flutberge selbst stillstehen bez. nach Mafsgabe der Mondbewegung ihre Stelle verhältnismäfsig langsam verändern. Sie übertragen durch die Viscosität des an der Erde haftenden Wassers ein Drehmoment auf diese, welches der Erddrehung entgegenwirkt. Wenn der Mond genau im augenblicklichen Äquator der Erde fest stünde und die Symmetrie der Flutbewegung durch die Kontinente nicht gestört wäre, würde die Axe des Drehmomentes mit der augenblicklichen Rotationsaxe übereinstimmen und seine Gröfse der Gröfse dieser proportional sein. Die hierdurch gekennzeichnete denkbar einfachste Bestimmung des Drehmomentes der Flutreibung wollen wir dann als annähernd und im Mittel allgemeingültig ansehen. Wir können etwa die beiden Flutberge mit den beiden Backen einer Eisenbahnbremse vergleichen, die sich an das rotierende Rad anlegen und dessen Umdrehung verlangsamen.

Die weitere Verfolgung des Einflusses der Flutreibung ist hierdurch auf ein Kreiselproblem zurückgeführt, welches bereits in Kap. VII, § 7 als Problem des Luftwiderstandes behandelt wurde: Ein sonst kräftefreier Kreisel steht unter dem Einflufs einer Drehkraft, deren Axe die augenblickliche Drehungsaxe ist und deren Gröfse der augenblicklichen Rotation negativ proportional ist. Wir sahen, dafs bei einem solchen Kreisel die Rotation allmählich erlischt und dafs gleichzeitig die Rotationaxe asymptotisch und spiralig mit der Axe des gröfsten Hauptträgheitsmomentes sich zu vereinigen strebt (vgl. pag. 588 und die Figur von pag. 589). Bei der Erde ist die Axe gröfsten

*) Vgl. hierzu Kap. 16 und 17 des Werkes von G. H. Darwin, auch wegen weiterer Litteratur. Insbesondere sei noch auf die dort erörterten überraschenden kosmogonischen Wirkungen der Gezeitenreibung hingewiesen.

Trägheitsmomentes die polare Hauptträgheitsaxe. Es könnte also scheinen, daſs wir in dieser Flutreibung eine die Polschwankungen ausgleichende und dämpfende Wirkung haben und daſs wir es dieser Wirkung verdanken, wenn trotz temporärer Störungen der Rotationspol im Mittel dem Trägheitspol erfahrungsgemäſs so nahe bleibt.

Indessen lehrt eine Zahlenrechnung, daſs diese Wirkung gänzlich zu vernachlässigen ist. Wir knüpfen dabei an Gl. (1) und (6) von pag. 587 und 588 an. In Gl. (6) bedeutete $\beta$ den Winkel, den die augenblickliche Rotationsaxe mit der Axe gröſsten Hauptträgheitsmomentes zur Zeit $t$ einschlieſst, $\beta_0$ denselben Winkel zur Zeit $t = 0$. Indem wir uns auf kleine Winkel $\beta$, $\beta_0$ beschränken, können wir Gl. (6) schreiben:

$$\frac{\beta}{\beta_0} = e^{-\lambda t\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)} = e^{-\frac{\lambda t}{C}\varepsilon},$$

wo $\varepsilon$ (rund gleich 1/300) wie früher die Elliptizität der Erde bedeutet. Nach der angezogenen Gl. (1) ist andrerseits:

$$\frac{r}{r_0} = e^{-\frac{\lambda t}{C}}.$$

Beide Gleichungen zusammengefaſst ergeben

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\varepsilon}.$$

Während also die Flutreibung eine ursprünglich vorhandene Ablenkung $\beta_0$ der Rotationsaxe auf die Hälfte ihres Betrages reduziert $\left(\beta = \frac{1}{2}\beta_0\right)$, reduziert sie gleichzeitig die ursprünglich vorhandene Erdrotation $r_0$ auf den Bruchteil

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\varepsilon} = 2^{-300} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-90}$$

ihrerselbst. Mit anderen Worten: *Die Erdrotation müſste vermöge der Flutreibung bereits so gut wie vollständig zur Ruhe gekommen sein, ehe die Hälfte einer ursprünglich vorhandenen Ablenkung der Rotationsaxe ausgeglichen ist.* In solcher Weise aufgefaſst kommt also die Flutreibung für die Frage der Polschwankungen überhaupt nicht in Betracht (ebensowenig wie der Massentransport der gewöhnlichen Mond- oder Sonnenflut, vgl. pag. 714) und kann auch nicht (vgl. pag. 593) zur Erklärung säkularer Änderungen der Rotationsaxe, wie sie in der Geologie häufig postuliert worden sind, herangezogen werden.

Indessen giebt es noch eine andere Art Fluten und eine andere Art Flutreibung, welche in wirksamerer Weise den Rotationspol nach dem Trägheitspol zurücklenken dürften, nämlich diejenigen Fluten, die durch die Polschwankungen selbst hervorgerufen werden (vgl. pag. 684, wo wir insbesondere den vierzehnmonatlichen Bestandteil dieser Fluten

erwähnten). Auch diese Fluten werden mit Reibung verbunden sein und zwar kann man sich vorstellen, daſs die Reibung hier der *Änderung der Rotationsaxe* entgegenwirkt und daſs ihre Axe auf der Rotationsaxe *senkrecht* steht, während die Reibung bei der gewöhnlichen Mond- und Sonnenflut von der jeweiligen Gröſse der *Rotation selbst* abhängt und ihrer Axe nach mit der jeweiligen Rotationsaxe *zusammenfällt.*

Wollen wir uns von dem Zustandekommen dieser Fluten eine möglichst einfache, wenn auch wieder etwas rohe Vorstellung bilden, so können wir folgendermaſsen sagen: Die Lage der Rotationsaxe im Erdkörper zu einer gewissen Zeit sei durch die Gröſsen $p, q, r$ gegeben; dieser Lage entspricht, wenn von der Einwirkung der Kontinente abgesehen wird, eine Anordnung der Wasserbedeckung, bei welcher letztere einen Flutgürtel um den zur Rotationsaxe senkrechten, augenblicklichen Äquator bildet. In einem folgenden Zeitpunkte sei die Lage der Rotationsaxe gegeben durch $p+p'dt,\ q+q'dt,\ r+r'dt$; der Flutgürtel legt sich jetzt um den nunmehrigen Äquator herum und ist gegen seine vorherige Lage gedreht. Wir führen ihn aus seiner ersten in seine zweite Lage über, indem wir ihn um die gemeinsame Senkrechte zur ersten und zweiten Lage der Rotationsaxe drehen und zwar durch einen Winkel, welcher dem Ablenkungswinkel der Rotationsaxe gleich ist. Die Flutreibung wirkt dieser Drehung entgegen; wir nehmen der Einfachheit wegen an, daſs das Moment der Flutreibung um dieselbe Axe wirkt, wie diese Drehung erfolgt, und der Gröſse der Drehungsgeschwindigkeit proportional ist. Die Axe der Flutreibung berechnet sich dann durch die Unterdeterminanten des folgenden Schemas:

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}.$$

Die Komponenten der Flutreibung werden daher den folgenden Ausdrücken proportional

$$qr'-rq',\quad rp'-pr',\quad pq'-qp'.$$

Berücksichtigen wir, daſs die Gröſsen $p, q, p', q', r'$ klein sind und daſs $r$ näherungsweise gleich $\omega$ ist, so können wir unter Vernachlässigung kleiner Gröſsen zweiter Ordnung dafür schreiben:

$$-\omega q',\quad \omega p',\quad 0.$$

Mit Benutzung eines positiven Proportionalitätsfaktors $\lambda$ setzen wir dementsprechend die Komponenten der Flutreibung den folgenden Gröſsen gleich

$$-\lambda A q',\quad +\lambda A p',\quad 0.$$

In der That erkennt man leicht, dafs durch diesen Ansatz den oben über Gröfse, Axe und Sinn des Flutreibungsmomentes gemachten Verabredungen entsprochen wird, falls die Drehgeschwindigkeit der Erde $\omega$ als positiv gerechnet wird, die Koordinatenaxen also die auf pag. 720 angegebene Lage haben. Das Trägheitsmoment $A$ wurde den vorstehenden Ausdrücken als Faktor hinzugefügt, damit die Gröfse $\lambda$ der Dimension nach eine reine Zahl vorstellt, was für das Folgende bequem ist.

Um den Einflufs dieser Flutreibung auf die Polschwankungen zu bestimmen, gehen wir auf die Eulerschen Gleichungen zurück, denen wir rechterhand die soeben bestimmten Komponenten der Flutreibung hinzufügen. Die Gleichung für die Komponente $r$ wird dadurch in erster Näherung nicht abgeändert. Diese Komponente können wir daher auch mit Rücksicht auf die Flutreibung als konstant ansehen und gleich $\omega$ setzen; mit anderen Worten: die Länge des Sterntages wird durch die jetzt in Rede stehenden Fluten innerhalb der von uns festgehaltenen Genauigkeitsgrenze nicht verlängert. Die Eulerschen Gleichungen für die Komponenten $p$ und $q$ des Drehungsvektors lauten, wenn wir von der Störung der Bewegung durch Massentransporte absehen und nur die freien Schwingungen der Erdaxe betrachten:

$$A p' = (A - C)\,\omega q - \lambda A q',$$
$$A q' = (C - A)\,\omega q + \lambda A p'.$$

Wir fassen sie zum Zweck der Integration in der öfters beschriebenen Weise in die eine komplexe Gleichung zusammen:

$$A(p' + iq') = (C - A)\,i\omega(p + iq) + i\lambda A(p' + iq'),$$

wofür wir mit Einführung der Elliptizität $\varepsilon$ auch schreiben können:

$$(1 - i\lambda)\,(p' + iq') = \varepsilon i\omega(p + iq).$$

Die Zahl $\lambda$ wird jedenfalls klein gegen 1 sein, da im anderen Falle periodische Polschwankungen überhaupt nicht zustande kommen könnten. Daher können wir ohne merklichen Fehler die Gleichung auch so umformen:

$$\frac{p' + iq'}{p + iq} = \varepsilon i\omega(1 + i\lambda)$$

und folgendermafsen integrieren:

$$p + iq = a e^{-\varepsilon\omega\lambda t + \varepsilon i\omega t}.$$

$a$ ist die Integrationskonstante, welche von der Anfangslage der Erdaxe, d. h. den der Betrachtung vorausgegangenen Störungen abhängt.

Von hier aus ergeben sich folgende Schlüsse: Die Reibung läfst die Periode der Polschwankungen ungeändert (ungeändert bis auf Gröfsen

zweiter Ordnung); ihre Frequenz wird auch jetzt durch das Produkt $\varepsilon\omega$ bestimmt; dagegen erscheinen die Schwingungen jetzt vermöge der Reibung *gedämpft.* Der Dämpfungsfaktor beträgt für die Dauer einer freien Schwingung nach der vorstehenden Formel $e^{-2\pi\lambda}$. Vermöge dieser Dämpfung wird ersichtlich der Rotationspol dem Trägheitspole genähert; auch ist es klar, dafs hierdurch der früher hervorgehobene Resonanzeffekt gemildert wird, sodafs beim Zusammenfallen der freien und erzwungenen Schwingungen die Amplitude des Rotationspoles nicht mehr unendlich wird, sondern eine durch den Wert des Dämpfungsfaktors bestimmte endliche Gröfse annimmt.

Über die zahlenmäfsige Gröfse dieser Dämpfung, insbesondere der Dämpfungskonstanten $\lambda$, sind wir leider zunächst völlig im Unklaren. Da wir schon über die Gröfse der fraglichen Fluten (vgl. pag. 706) theoretisch nichts auszusagen vermochten, wird es noch weniger möglich sein, die Gröfse ihrer Reibungswirkung zahlenmäfsig abzuschätzen.

Wir wollen noch bemerken, dafs sehr wahrscheinlich auch die im vorigen Paragraphen besprochenen Deformationen des Erdkörpers mit Energieverlusten verbunden sind und daher ebenfalls einen Beitrag zur Dämpfung der freien Schwingungen liefern werden. Wenigstens ist uns kein elastischer Körper bekannt, in welchem einmal erregte Deformationsschwingungen nicht alsbald abstürben; wir schieben diesen Umstand auf das Auftreten innerer Reibungsvorgänge oder elastischer Nachwirkungen. Es wäre nun höchst unphysikalisch, anzunehmen, dafs dies bei dem Erdkörper anders sein sollte. Infolgedessen scheint es angemessen, neben der Flutreibung auch die innere Reibung des Erdkörpers bei seinen früher beschriebenen Formänderungen als eine mögliche Dämpfungsursache der Polschwankungen ins Auge zu fassen.

Bisher hat man bei der rechnerischen Behandlung der Polschwankungen die dämpfende Wirkung der verschiedenen möglichen Energieverluste, die ja in analogen Fällen bei sonstigen mechanischen Problemen mit Recht berücksichtigt wird*), wohl stets vernachlässigt, indem man die Polbahn durch eine nach reinen, ungedämpften trigonometrischen Funktionen der Zeit fortschreitende Fourier'sche Reihe darstellte (vgl. die Citate auf *Chandler* pag. 673 und *van de Sande Bakhuyzen* pag. 682). Auch unsere graphische Reduktion der Polbahnen in § 6 dieses Kapitels fufste auf dieser Annahme und würde zu modifizieren sein, wenn wir die Dämpfung berücksichtigen bez. wenn wir aus der thatsächlich beobachteten Polbahn aufser den verschiedenen in der Polbahn versteckten

---

*) Vgl. z. B. Routh, Dynamik starrer Körper, Bd. II (deutsche Ausgabe Leipzig 1898) Kap. VII § 331—333.

Perioden auch die Gröfse ihrer Dämpfungen ermitteln wollen. Da eine theoretische Vorausberechnung der Dämpfungskonstante $\lambda$ ziemlich aussichtslos erscheint, so sollte man vielleicht versuchen, in der soeben angedeuteten Weise aus den Polschwankungen selbst darüber Aufschlufs zu erhalten.

Natürlich ist die oben zu Grunde gelegte Vorstellung über die Wirkung der Polschwankungsfluten eine recht idealisierte; wegen des Einflusses der Kontinente auf die Flutbewegung werden die Verhältnisse in Wirklichkeit viel komplizierter liegen. Es wird daher erwünscht sein, ohne spezielle Annahmen zuzulassen, durch eine ganz allgemeine Betrachtung, die auch den Fall der Deformationsreibung im Innern des Erdkörpers umfafst, die Wirkung irgend welcher energieverzehrender Umstände wenigstens ihrem Sinne nach zu bestimmen.

Bei den Polschwankungen und den durch sie erzeugten Fluten und Deformationen sowie der zugehörigen Flutreibung und Deformationsreibung kommen nur innere Kräfte ins Spiel, die den Gesamtimpuls des Massensystems, das wir Erde nennen, ungeändert lassen (im Gegensatz zu der vorher betrachteten Flutreibung, die durch die äufseren Kräfte von Sonnen- und Mondanziehung hervorgebracht wird). Für die Komponenten des Gesamtimpulses gilt daher die Gleichung

$$L^2 + M^2 + N^2 = \text{const.},$$

die wir als Gleichung einer Kugel deuten können. Andrerseits wird die lebendige Kraft des Systems durch die Reibung vermindert, indem ein Teil derselben in Wärme umgesetzt wird. Wenn wir uns gestatten, den Ausdruck der lebendigen Kraft eines starren Kreisels auf unser in sich bewegliches System zu übertragen, so können wir schreiben

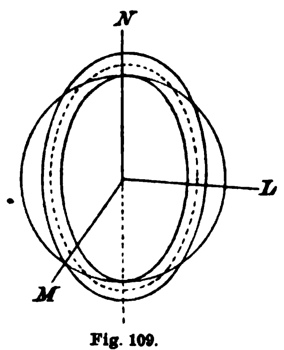


Fig. 109.

$$\frac{L^2 + M^2}{A} + \frac{N^2}{C} = 2T,$$

und können diese Gleichung in den Koordinaten $L, M, N$ für jeden Wert von $T$ als ein Rotationsellipsoid deuten. Und zwar handelt es sich um ein verlängertes Rotationsellipsoid (wegen $C > A$), welches, indem es sich selbst ähnlich bleibt, sich allmählich zusammenzieht (wegen der allmählichen Abnahme von $T$). Auf der Schnittkurve beider Flächen (Kugel und Ellipsoid) mufs der Endpunkt des Impulsvektors $L, M, N$ liegen; diese Schnittkurve zieht sich aber bei der allmählichen Verkleinerung unseres Ellipsoides auf einen Punkt der $N$-Axe zusammen

(vgl. Fig. 109); der Impulsvektor und zugleich mit ihm die Rotationsaxe geht dabei in die polare Hauptträgheitsaxe, der Bewegungszustand also in die einfache gleichförmige Umdrehung um diese Axe über.

Insoweit als diese Überlegung auf den Fall der Flutreibung oder auf andere dissipative Einflüsse anwendbar ist, dürfen wir behaupten, dafs solche Einflüsse irgendwie erzeugte Störungen des einfachsten Bewegungszustandes der Erde ausgleichen und die Lage des Rotationspoles auf der Erdoberfläche stabilieren werden.

## § 9. Der Nachweis der Erdrotation durch die Kreiselwirkung. Foucaults Gyroskop und Gilberts Barogyroskop.

Nachdem Léon Foucault im Jahre 1851 seinen glänzenden Pendelversuch zum Nachweis der Erdrotation durchgeführt hatte, unternahm er es im folgenden Jahre, demselben Zweck die Kreiselwirkungen dienlich zu machen. Er benutzte einen Kreisel im Cardanischen Gehänge (vgl. z. B. die schematische Figur 2 von pag. 2), dessen einzelne Teile: Schwungring, innerer und äufserer Ring, mit gröfster Sorgfalt so justiert waren, dafs der Schnittpunkt ihrer Drehaxen zugleich Schwerpunkt jedes dieser Teile war. Foucaults Versuchsanordnung war eine doppelte: das eine Mal*) liefs er dem Kreisel seine *drei Freiheitsgrade*, indem er den äufseren Ring um eine vertikale Axe in Spitzen drehbar machte. Diese Spitzen dienten dabei nicht sowohl zum Tragen des Kreisels, als zur Verhinderung seitlicher Bewegungen; getragen wurde das Gewicht des Kreisels vielmehr durch einen torsionslosen Faden, an dem der äufsere Ring aufgehängt war. Der innere Ring ruhte mittels Schneiden auf gewissen Auflagerflächen des äufseren Ringes. Das andere Mal**) stellte er den inneren Ring gegen den äufseren fest, operierte also mit einem Kreisel von nur mehr *zwei Freiheitsgraden*, welcher vermöge seiner Verbindung mit der Erde in gewisser Weise geführt wird.

Im Falle des Kreisels von drei Freiheitsgraden bleibt nach Foucault bei starker Rotation des Schwungringes *die ursprüngliche Richtung seiner Axe im absoluten Raume fest*, oder, anders ausgedrückt, weist diese Axe beständig *nach demselben Punkte des Fixsternhimmels*. Von der Erde aus gesehen bewegt sich also jeder ihrer Punkte parallel der

*) Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la Terre, Comptes Rendues Bd. 35, Paris 1852, pag. 421.

**) Sur les phénomènes d'orientation des corps tournants entraînés par une axe fixe à la surface de la Terre — Nouveaux signes sensibles du mouvement diurne. l. c. pag. 524.

Richtung des Äquators. Geometrische Betrachtungen der einfachsten Art zeigen von hier aus die Richtigkeit der folgenden Angaben:

Weist die Axe zu Beginn des Versuches nach dem Zenith, so bildet sie nach der Beobachtungszeit $\Delta t$ den Winkel $\omega \cos\varphi \Delta t$ ($\omega$ = Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung, $\varphi$ = geographische Breite) mit der Lotlinie, weil in der gleichen Zeit das ursprüngliche Zenith diesen Bogen um den Pol des Himmels beschreibt. Liegt andrerseits die Axe des Schwungringes ursprünglich horizontal und in der Richtung des Meridians, so bleibt sie für eine hinreichend kurze Beobachtungszeit horizontal und bildet nach der Zeit $\Delta t$ den Winkel $\omega \sin\varphi \Delta t$ mit dem Meridian, weil ein Stern am Horizont unter dem Meridian den Polabstand $\varphi$ (oder $\pi - \varphi$) besitzt und während der Zeit $\Delta t$ einen Bogen $\omega \sin\varphi \Delta t$ von horizontaler Richtung beschreibt. Derselbe Ausdruck $\omega \sin\varphi \Delta t$, der übrigens auch bei dem Foucaultschen Pendelversuch auftritt, gilt auch für die Horizontalkomponente der Winkeländerung bei beliebiger horizontaler Anfangslage der Schwungringaxe. Fragen wir uns nämlich nach der scheinbaren Bewegung eines Sternes im Horizont bei beliebigem Azimuth, so besteht dieselbe aus einer Drehung $\omega$ um die Polaraxe, die wir uns in eine Drehung $\omega \sin\varphi$ um die Lotlinie und eine Drehung $\omega \cos\varphi$ um den Meridian zerlegen können. Die erstere Komponente liefert die Horizontalbewegung des Sternes, welche während der Beobachtungszeit $\Delta t$ also $\omega \sin\varphi \Delta t$ betragen wird; die letztere Komponente giebt die Höhenänderung des Sternes. Die erstere Komponente und also auch die Horizontalkomponente der Bewegung der Kreiselaxe ist hiernach von dem Azimuth der Anfangsstellung unabhängig.

An letzteren Umstand knüpft die Versuchsanordnung von Foucault an. Man beachte, dafs bei horizontaler Anfangslage die Bewegung der Kreiselaxe durch das Cardanische Gehänge von selbst in ihre zwei Komponenten zerlegt wird, dafs nämlich die Bewegung des äufseren Ringes die horizontale Komponente der Bewegung der Kreiselaxe wiedergiebt, während sich die Bewegung des inneren Ringes allein durch die Höhenänderung der Kreiselaxe bestimmt. Foucault beobachtet daher unter dem Mikroskop den äufseren Ring, dessen Verdrehung gleich $\omega \sin\varphi \Delta t$ sein soll. Als gröfstmöglichen Wert der Beobachtungsdauer giebt Foucault 8 bis 10 Minuten an. Berechnen wir also mit $\Delta t = 8$ Min. und $\varphi = 49^0$ (ungefähre Breite von Paris) die zu erwartende Ablenkung, so ergiebt sich in Gradmafs:

$$\omega \sin\varphi \Delta t = \frac{360 \cdot 8}{24 \cdot 60} 0{,}75 = 1^0{,}5.$$

Diese ziemlich beträchtliche Verdrehung müfste sich zumal unter dem Mikroskop mit grofser Sicherheit feststellen lassen.

Hiermit contrastiert einigermafsen der Umstand, dafs Foucault nur von dem Sinn der Verdrehung spricht, der sich bei seinen Versuchen richtig, also dem Sinne der Erdrotation entgegengesetzt ergab, dafs er dagegen Zahlenwerte aus seinen Beobachtungen nicht mitteilt. Wir wissen nicht, wie weit diese mit den theoretischen Werten gestimmt haben. Solange aber die quantitative Übereinstimmung nicht nachgewiesen ist oder solange die Fehlerquellen, welche die Nichtübereinstimmung bewirken, unbekannt sind, können die Versuche kaum als unwiderleglicher Beweis der Erdrotation angesprochen werden; es könnte ja sein, dafs im vorliegenden Falle die Fehlerquellen die Ablenkung des Ringes stärker beeinflussen wie die Erdrotation selbst und dafs der richtige Sinn des Resultates nur scheinbar durch zufällige Gruppierung der verschiedenen Fehler hergestellt wird.

Als Fehlerquellen kommen hier namentlich eine nicht genaue Centrierung des Apparates und die Reibung in den verschiedenen Lagern in Betracht. Wohl ist der Foucaultsche und Gaufsische *Pendelversuch* von Kamerlingh-Onnes*) in musterhafter Weise nach der quantitativen Seite hin auf alle Fehlerquellen durchgeprüft worden; für den Foucaultschen *Kreiselversuch* dagegen scheint eine solche Prüfung nie unternommen zu sein.

Die grofse historische Bedeutung des Foucaultschen Kreiselversuches scheint uns daher weniger in dem Nachweis der Erdrotation selbst als darin zu liegen, dafs durch diesen Versuch die allgemeine Aufmerksamkeit auf die Kreiselwirkungen gelenkt wurde und dafs die Kenntnis der Kreiselwirkungen durch die geniale, von der Formel losgelöste Unmittelbarkeit der Foucaultschen Auffassung wesentlich gefördert wurde.

Bevor wir die Theorie dieses Versuches kritisch beleuchten, wollen wir zunächst Näheres über die zweite Versuchsanordnung von Foucault, über den *Kreisel von zwei Freiheitsgraden*, berichten. Die Axe des Schwungringes bleibt jetzt nicht mehr im Raume fest; *vielmehr strebt dieselbe nach Foucault sich der Axe der Erddrehung soweit parallel zu stellen, als es die besonderen Umstände des Versuches erlauben.* Foucault spricht daher von der *Tendenz der Drehaxen zum Parallelismus* **), indem er unter Parallelismus der Axen nicht nur das Zusammenfallen der Axenrichtungen, sondern gleichzeitig das Übereinstimmen des Dreh-

*) Dissertation Groningen 1879. Nieuve bewijzen voor de aswenteling der aarde.

**) Sur la tendance des rotations au parallélisme. Comptes Rendues l. c. pag. 602.

sinnes um die Axen versteht — man könnte genauer sagen: *Tendenz zum gleichsinnigen oder homologen Parallelismus.*

Etwa gleichzeitig mit Foucault hat G. Sire*) dasselbe Gesetz zum Gegenstand einer Mitteilung an die Pariser Akademie gemacht und auf den Nachweis der Erdrotation angewandt, ohne selbst Versuche auszuführen. Die theoretischen Überlegungen von Sire, durch welche dieses Gesetz gestützt wird, sind indessen nicht einwandfrei, da sie an einer gewissen Vieldeutigkeit des Wortes Axe leiden (Figurenaxe, Rotationsaxe, Impulsaxe). Etwas Ähnliches läfst sich wohl auch gegen die glänzend geschriebenen Ausführungen Foucaults sagen; allerdings beabsichtigen dieselben bei ihrer Kürze mehr beschreibender als beweisender Natur zu sein. (Vgl. hierzu unsere Kritik der populären Kreisellitteratur in Kap. V, § 3 unter 2).

Foucault untersucht auf Grund des genannten Gesetzes das Verhalten der Schwungringaxe in den beiden besonderen Fällen, wo die Schwungringaxe entweder nur in der Horizontalebene, oder nur in der Vertikalebene durch den Meridian des Beobachtungsortes frei beweglich ist. Man erreicht dieses, indem man beidemal den inneren Ring unter einem rechten Winkel gegen den äufseren festklemmt und die Drehaxe des äufseren Ringes im ersten Falle in die Lotlinie, im zweiten Falle senkrecht gegen die Meridianebene des Beobachtungsortes stellt.

Im ersten Falle, wo die Axe des Schwungringes die Horizontalebene nicht verlassen kann, ist ein wirklicher Parallelismus zwischen ihr und der Erdaxe nicht möglich: die Axe des Schwungringes strebt alsdann derjenigen Richtung zu, welche den kleinsten Winkel mit der Erdaxe bildet, d. i. der Richtung des Meridianes. Und zwar wird diejenige Seite der Axe, von der aus gesehen der Schwungring entgegen dem Uhrzeigersinne rotiert, nach Norden weisen, weil die Erde um den Nordpol in dem gleichen Sinne rotiert. *Unsere horizontal bewegliche Schwungringaxe verhält sich also ähnlich wie die Magnetnadel im Deklinationskompafs* (natürlich mit dem Unterschiede, dafs im Foucaultschen Versuch der astronomische Meridian an die Stelle des magnetischen tritt). Im Anschlufs an diese Analogie können wir diejenige Seite der Axe, von der aus gesehen die Schwungringumdrehung umgekehrt wie die Uhrzeigerbewegung erfolgt, als *Nordpol* des Schwungringes, die umgekehrte Seite als *Südpol* bezeichnen.

Im anderen Falle, wo die Axe des Schwungringes in der Meridian-

*) Eine spätere Veröffentlichung von Sire findet sich in der Bibliothèque universelle de Genève, Arch. d. scienc. phys. et natur. Bd. 1 (1858) pag. 105.

ebene beweglich ist, wird der genaue Parallelismus dieser Axe mit der Erdaxe nicht nur angestrebt, sondern auch (bei hinreichend lang anhaltender Schwungringumdrehung) erreicht. Die Axe des Schwungringes bewegt sich, wenn sie etwa anfangs horizontal stand, in solcher Weise, dafs auf der nördlichen Halbkugel ihr „Nordpol" aus der Horizontalebene nach oben hin heraustritt und dafs sich die Verbindungslinie Süd-Nordpol des Schwungringes mit der Verbindungslinie Süd-Nordpol der Erde gleichsinnig parallel richtet. *Unsere in der Meridianebene bewegliche Schwungringaxe kann also mit der Magnetnadel in einem Inklinationskompafs verglichen werden* (natürlich abermals mit dem Unterschiede, dafs an die Stelle der auf der Erdoberfläche bekanntlich recht unregelmäfsig verlaufenden Linien gleicher Inklination hier die genauen geographischen Breitengrade treten würden). Dabei besteht aber der wesentliche Unterschied, *dafs sich der „Nordpol" des Schwungringes auf der nördlichen Halbkugel hebt, während sich der der Inklinationsnadel senkt.*

Theoretisch liegt also, wie Foucault betont, die Möglichkeit vor, ohne astronomische oder magnetische Beobachtungen sowohl die Lage des Meridians wie nach Bestimmung desselben die Lage der Weltaxe für einen beliebigen Ort aus blofsen Kreiselbeobachtungen abzuleiten. Man könnte daran denken, in der Tiefe eines Bergwerks von dieser Möglichkeit Nutzen zu ziehen.

Es ist selbstverständlich, dafs die Einstellung der Kreiselaxe in den Meridian bez. in die Richtung der Weltaxe nicht aperiodisch, sondern oscillatorisch vor sich gehen mufs. Die Drehkraft, welche z. B. die horizontal bewegliche Kreiselaxe dem Meridian zuführt, erzeugt eine gewisse Drehbeschleunigung und Drehgeschwindigkeit um die vertikale Axe. Während nun bei meridionaler Lage der Kreiselaxe die Drehkraft verschwindet, so verschwindet darum nicht gleichzeitig die Geschwindigkeit. Diese führt die Kreiselaxe vielmehr über die Gleichgewichtslage hinaus, worauf die Richtkraft ihren Sinn umkehrt und zuerst verlangsamend, dann im umgekehrten Sinne beschleunigend wirkt. Die Kreiselaxe mufs also um den Meridian herumpendeln — ebenfalls in Analogie mit der Magnetnadel. Steht die Kreiselaxe anfänglich im Meridian, aber so dafs ihr „Nordpol" nach Süden weist, so ist auch diese Lage an sich eine Gleichgewichtslage, weil die auf die Kreiselaxe wirkende Drehkraft verschwindet, aber ersichtlich eine instabile: bei einer kleinen Abweichung von dieser Lage strebt die Drehkraft die Abweichung zu vergröfsern und das Nordende der Axe nach Norden überzudrehen.

Foucault verwahrt sich dagegen, dafs auf dem beschriebenen Wege

die Lage des Meridians oder die Stellung der Weltaxe im Raume hinreichend genau bestimmt werden könnte. Wie es scheint, hat Foucault auch die zuletzt genannten Versuche mehr auf ihre allgemeine Möglichkeit wie auf ihre exakte Durchführbarkeit hin geprüft. —

Wir erwähnen noch, daſs Foucault im Anschluſs an seine Versuche das jetzt vielfach gebräuchliche Wort *Gyroskop* geprägt hat. Dieses drückt in schlagender Weise das Resultat der Foucaultschen Versuche aus, *daſs nämlich der Kreisel ein Mittel ist, um vorhandene Drehbewegungen* (oder Gyrationen) *kenntlich zu machen*, ähnlich wie das Elektroskop ein Hülfsmittel bezeichnet, das Vorhandensein elektrischer Ladungen sichtbar zu machen. Würde es gelingen, auch die Gröſse einer vorhandenen Drehbewegung durch quantitative Messung der Kreiselbewegungen festzustellen, so dürfte man dem Kreisel sogar die weitergehende Bezeichnung eines „Gyrometers“ beilegen.

Dagegen scheint es uns unzweckmäſsig, die Bezeichnung Gyroskop zu verallgemeinern und als gleichbedeutend mit dem Worte Kreisel zu gebrauchen, was in der Litteratur häufig geschehen ist. In der That bringt doch die Bezeichnung Gyroskop nur eine besondere Anwendung des nach den verschiedensten Seiten hin interessanten und wichtigen Kreiselbegriffes zum Ausdruck und es liegt kein Grund vor, die charakteristische Bezeichnung *Kreisel (turbo, toupie, top)* zu verlassen. —

Wir haben nun die Theorie der Foucaultschen Versuche, zunächst desjenigen mit dem Kreisel von drei Freiheitsgraden, zu vertiefen. Dabei liegt es uns fern, diesen Versuch mit ausgedehnten analytischen Entwickelungen aus der Theorie der Relativbewegungen begleiten zu wollen, wie sie thatsächlich angestellt worden sind, Entwickelungen*), deren Endresultat nach den ihnen zu Grunde liegenden Voraussetzungen schlieſslich kein anderes sein kann, als die Bestätigung der Foucaultschen Angabe, wonach die Kreiselaxe ihre Lage im absoluten Raume im Wesentlichen beibehält. Die Schwierigkeit und Unübersichtlichkeit der fraglichen Entwickelungen hat nur darin ihren Grund, daſs in ihnen nicht konsequent vernachlässigt wird, daſs nämlich das Gyroskop nicht durchweg als verschwindend klein gegen die Erde oder seine Umdrehungsgeschwindig-

---

*) Es handelt sich u. A. um Arbeiten von Quet (Liouvilles Journal Bd. 18 (1853)), Lottner (Crelles Journal Bd. 54 (1857)), Bour (Liouvilles Journal (2) Bd. 8 (1863)). Zusammengestellt bei Gilbert: Étude historique et critique sur le problème de la rotation (aus Annales de la Société Scientifique de Bruxelles Bd. 2 (1878)). Wir nennen ferner die groſse Arbeit von Gilbert: Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes du mouvement relatif (Ebenda Bd. 6 und 7 1881—1883) und das Werk von Budde: Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme (Berlin 1890, 1891, Bd. 2 Nr. 294).

keit nicht durchweg als unendlich grofs gegen die Erdumdrehung vorausgesetzt wird. Wir verweisen dieserhalb auf die zutreffende Kritik von E. Guyou*), der wir nur noch hinzufügen möchten, dafs man mit demselben ungeheuren Grade der Annäherung, mit dem man die Geschwindigkeit der Erdumdrehung gegen die der Kreiselrotation vernachlässigt, auch die Trägheitswirkung des äufseren und inneren Ringes gegen die des Schwungringes vernachlässigen darf, worauf wir unten zurückkommen werden.

Zunächst wollen wir ausdrücklich verabreden, dafs es erlaubt sei, den äufseren und inneren Ring als *masselos* zu betrachten und *von Reibungswirkungen abzusehen.* Dann haben wir allein von dem Schwungringe zu sprechen. Dieser ist um seinen Schwerpunkt frei beweglich und von Kräften frei, da die Schwerkraft als im Stützpunkte angreifend nicht in Betracht kommt. Die Bewegung des Schwungringes besteht daher allgemein gesprochen in einer *regulären Präcession* relativ zum absoluten Raume. Die an der Erddrehung teilnehmende Schwerpunktsbewegung beeinflufst diese Drehbewegung in keiner Weise. Denn Bewegung des Schwerpunktes und Drehung um den Schwerpunkt sind wie bekannt zwei Vorgänge, die sich beim Fehlen äufserer Kräfte glatt superponieren, ohne sich irgendwie zu stören.

Dies würde auch dann noch gelten, wenn die Schwerpunktsbewegung nicht eine nahezu gleichförmig-geradlinige wäre, wie sie es bei der Erddrehung für den Zeitraum einiger Minuten thatsächlich ist, sondern *wenn der Schwerpunkt in willkürlicher Weise und in beliebigen scharfen Krümmungen geführt würde.* Ja es würde nicht nur gelten für den schnell rotierenden, sondern ebensogut *für den nicht angedrehten Schwungring,* immer unter der Voraussetzung der Reibungslosigkeit der Führungen und der Massenlosigkeit der Ringe. In der That ist die kräftefreie Bewegung des symmetrischen Kreisels bei beliebiger Gröfse der Eigenrotation eine reguläre Präcession; von der gröfseren oder geringeren Eigenrotation, die wir dem Kreisel erteilen, hängt es lediglich ab, ob der entstehende Präcessionskegel bei gegebenem seitlichen Anstofs eine geringere oder gröfsere Winkelöffnung erhält. Wäre es zu erreichen, dafs die Axe des Schwungringes zu Beginn des Versuches momentan im absoluten Raume genau stillsteht, so würde sie ihre Lage gegen den absoluten Raum genau beibehalten, der Öffnungswinkel des Präcessionskegels wäre und bliebe dann genau gleich Null, ganz unabhängig davon, ob der Schwungring um seine Axe rotiert oder nicht,

*) Sur une solution élémentaire du problème du gyroscope de Foucault. Comptes Rendues Bd. 106, Paris 1888, pag. 1143.

und ob der Schwerpunkt des Apparates bewegt wird oder nicht; denn nachdem wir die Reibung wegdefiniert haben, giebt es nichts, was die einmal ruhende Schwungringaxe in Bewegung setzen könnte. Wir hätten hier also die von Foucault behauptete Stabilierung der Kreiselaxe im Raume ohne das von Foucault hierfür als unerläßlich angesehene Mittel einer hohen Eigenrotation.

Allerdings ist der soeben vorausgesetzte Anfangszustand der Kreiselaxe experimentell nicht zu erreichen. Der Experimentator kann die anfängliche Ruhe der Kreiselaxe nur vom Standpunkte der Erdbewegung aus beurteilen; er ist bestrebt, nicht die absolute Ruhe im Raume, sondern die relative Ruhe gegen die Erde zu verwirklichen. Nehmen wir an, daß ihm letzteres genau gelungen sei, und sehen wir zu, wie sich die Bewegung der Kreiselaxe gestaltet, wenn der Kreisel insbesondere nicht angedreht ist.

In der Anfangslage weist die Kreiselaxe bei dem ersten Foucault'schen Versuche horizontal; sie bildet mit der Umdrehungsaxe der Erde den Winkel $\alpha$, welcher zwischen $\varphi$ und $\pi - \varphi$ ($\varphi$ = geographische Breite des Ortes) enthalten ist und von dem Azimuth der Kreiselaxe gegen den Meridian abhängt. Der anfängliche Geschwindigkeitszustand besteht in einer Drehung um die Erdaxe von der Größe $\omega$ ($\omega$ = Erdrotation). Diese Drehung zerlegt sich in eine Komponente $\omega \cos \alpha$ um die Figurenaxe und in eine Komponente $\omega \sin \alpha$ um eine äquatoriale Axe des Schwungringes. Der Anfangsimpuls des Kreisels hat nach denselben Axen die Komponenten $C\omega \cos \alpha$, $A\omega \sin \alpha$; er bildet im Falle des Schwungringes (abgeplattetes Trägheitsellipsoid) mit der Figurenaxe einen Winkel $\beta < \alpha$, welcher bestimmt ist durch

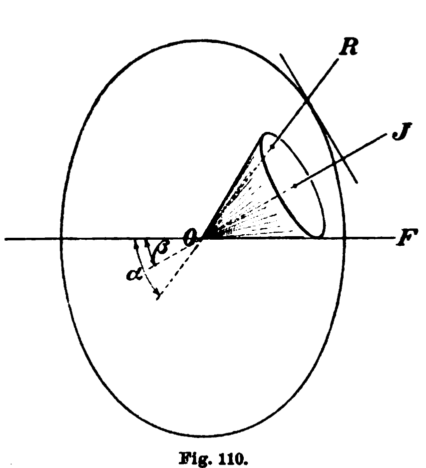


Fig. 110.

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{A}{C} \operatorname{tg} \alpha .$$

Der Winkel $\beta$ kann auch durch eine bekannte Konstruktion (vgl. p. 106) gefunden werden, die in Fig. 110 angedeutet ist. Aus der Richtung der Rotationsaxe $OR$, die hier mit der Erdaxe zusammenfällt und der Richtung der Figurenaxe $OF$ folgt die Richtung der Impulsaxe $OJ$, indem man an die Spur des Trägheitsellipsoides in der Ebene $ROF$ die Tangente im Schnittpunkte mit $OR$ legt und auf diese das Lot von $O$ fällt.

Bei der nun folgenden Bewegung beschreibt die Figurenaxe im Raume einen Präcessionskegel um die Impulsaxe von dem soeben bestimmten Öffnungswinkel $\beta$. Dagegen beschreibt eine mit der Erde fest verbundene von $O$ auslaufende Richtung vermöge der Erdrotation einen Kegel um die Rotationsaxe der Erde. Aus der Verschiedenheit der Kegel ergiebt sich, dafs auch der nicht eigens angedrehte Kreisel, von der Erde aus beurteilt, Bewegungen ausführen würde und also (bei gänzlich ausgeschalteter Reibung) im Sinne Foucaults als Gyroskop funktionieren würde.

Natürlich ist aber auch die Voraussetzung, dafs sich der Kreisel im Anfangszustande genau in relativer Ruhe gegen die Erde befunden habe, unzulässig. Selbst bei sorgfältigstem Experimentieren wird die Kreiselaxe relativ gegen die Erde eine Anfangsgeschwindigkeit haben, die mit Rücksicht auf die Geringfügigkeit der Erdrotation möglicher Weise gröfser sein kann wie die der letzteren entprechende Geschwindigkeit. Der anfängliche Impulsvector, der sich aus dieser Geschwindigkeit zusammen mit der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation bestimmt, kann dann jede beliebige Lage und der Präcessionskegel, den die Figurenaxe um diesen Impulsvektor beschreibt, jede beliebige Winkelöffnung haben. Wenn z. B. durch den anfänglichen Anstofs die Komponente der Erdrotation nach der Figurenaxe des Kreisels gerade aufgehoben, die Eigenrotation des Kreisels mithin zufällig Null wird, so würde der Impulsvektor in eine äquatoriale Axe fallen; der Präcessionskegel würde dann in die zu dieser Axe normale Ebene ausarten. Wenn andrerseits die Komponente der Erdrotation nach der Äquatorebene des Kreisels durch den anfänglichen Anstofs zufällig aufgehoben wird, so würde der Präcessionskegel unendlich schmal werden und mit der Figurenaxe zusammenfallen; diese selbst würde dann im Raume absolut stillstehen. Mit Rücksicht auf derartige unkontrollierbare geringfügige Anfangsimpulse würde also die weitere Bewegung des Kreisels völlig unsicher werden.

*Und nun ist die Sache die, dafs man dieser Unsicherheit entgeht, wenn man dem Kreisel eine gegen die Erdrotation grofse Eigenrotation erteilt.* Hierzu würde z. B. schon eine Geschwindigkeit von einer Umdrehung pro Sekunde genügen, da dieselbe $24 \cdot 60 \cdot 60$ mal gröfser als die Geschwindigkeit der Erdumdrehung ist. Etwa mit dieser Umdrehungsgeschwindigkeit hat Foucault in der That gearbeitet*). Der Gesamtimpuls des Kreisels, der sich aus diesem absichtlichen Eigen-

*) Vgl. hierzu Instructions sur les expériences du gyroscope; in dem Buche: Recueil des travaux scientifiques de L. Foucault, Paris 1878, p. 417.

impuls, dem sonstigen unvermeidlichen Anfangsimpuls und dem Impuls der Erdrotation zusammensetzt, wird alsdann fast genau die Richtung der Figurenaxe haben. Gleichzeitig wird der Präcessionskegel so schmal, daſs wir mit einer für alle Versuche hinreichenden Genauigkeit von einer absoluten Ruhe der Figurenaxe im Raume sprechen können.

Die dem Kreisel zu erteilende Eigenrotation bezweckt also in erster Linie, *von den unkontrollierbaren Anfangsimpulsen beim Ingangsetzen des Kreisels frei zu werden*, wodurch überhaupt erst eine bestimmbare und wohldefinierte Bewegung des Kreisels ermöglicht wird, in zweiter Linie, *den Präcessionskegel hinreichend eng zu machen*, wodurch diese Bewegung so einfach wie möglich wird, wobei sie nämlich merklich in die einfache Rotation um die im Raum feste Figurenaxe übergeht. Ist $\Omega$ die Eigenrotation des Kreisels und wie früher $\omega$ die Geschwindigkeit der Erdumdrehung, $\alpha$ der anfängliche Winkel der Figurenaxe gegen die Drehaxe der Erde, ferner $\omega_0$ die durch unabsichtliche Anstöſse dem Schwungringe erteilte anfängliche Drehgeschwindigkeit relativ gegen die Erde, $\gamma$ der Winkel, den die Figurenaxe mit der Axe von $\omega_0$ bildet, so bestimmt sich die Öffnung $\beta$ des Präcessionskegels ähnlich wie in Formel (1) zu:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A}{C} \cdot \frac{\omega \sin \alpha + \omega_0 \sin \gamma}{\Omega + \omega \cos \alpha + \omega_0 \cos \gamma}. \tag{2}$$

Wenn $\Omega$ groſs gegen $\omega$ und $\omega_0$, so hat man merklich $\beta = 0$. Nehmen wir, wie es oben geschah, an, daſs $\omega_0$ und $\omega$ etwa von gleicher Gröſsenordnung sind, so können wir kurz sagen, daſs die Öffnung des Kegels von der Gröſsenordnung $\omega/\Omega$ wird und daſs die Richtung der Figurenaxe dann und nur dann als unveränderlich anzusehen ist, wenn man Gröſsen von der Ordnung $\omega/\Omega$ vernachlässigt.

Somit ist die Foucaultsche Angabe von der im Raum festen Schwungringaxe unter den bisherigen Vernachlässigungen als hinreichend genau bestätigt und gleichzeitig die eigentliche Rolle, die der Eigenrotation hierbei zufällt, deutlicher als bei Foucault hervorgekehrt.

Zunächst soll nun der Einfluſs des *Massensystems der Aufhängeringe* studiert bez. nachgewiesen werden, daſs sie ohne merklichen Einfluſs auf die Lage des Schwungringes sind. Solange wir sie als masselos voraussetzten, stand die Axe des Schwungringes bei hinreichender Eigenrotation desselben merklich im Raume stille. Dementsprechend wird unter dieser Voraussetzung ein Durchmesser $D$ des inneren Ringes, nämlich der mit der Schwungringaxe zusammenfallende, im Raume festgehalten. Andrerseits wird ein Durchmesser $D'$ des äuſseren Ringes, nämlich der in

die Lotlinie des Beobachtungsortes fallende, durch seine Verbindung mit der rotierenden Erde in ganz bestimmter Weise geführt. Es ist aber klar, dafs die Bewegung des Systems unserer beiden Ringe durch Angabe der Bewegung zweier Durchmesser $D$ und $D'$ vollständig festgelegt ist: Wenn der Durchmesser $D$ wirklich im Raume genau stillsteht und der Durchmesser $D'$ genau die Bewegung der Lotlinie mitmacht, so ist die Bewegung unserer beiden Ringe dadurch *zwangläufig* gemacht. Ihre Drehgeschwindigkeit wird hierbei ersichtlich *von der Gröfsenordnung der Geschwindigkeit der Erdrotation.* Des Näheren sahen wir bereits pag. 732, dafs, solange die Schwungringaxe relativ zur Erde wenig von ihrer horizontalen Anfangslage abweicht, die Winkelgeschwindigkeit des äufseren Ringes gleich $\omega \sin \varphi$ sein würde; die des inneren Ringes wird, wie gleichfalls aus der angezogenen früheren Überlegung folgt, gleich $\omega \cos \varphi \sin \lambda$, wo $\lambda$ das Azimuth der Kreiselaxe gegen den Meridian des Beobachtungsortes bedeutet. Indem des Weiteren die Schwungringaxe ihre Stellung im Raum behauptet und sich dabei im Laufe der Zeit aus der Horizontalen des Beobachtungsortes entfernt, ändern sich diese Werte der Geschwindigkeiten stetig, bleiben aber dauernd von der Gröfsenordnung $\omega$.

Jetzt stellen wir uns vor, dafs die beschriebene Bewegung der Ringe auch bei nicht verschwindender Masse derselben zwangläufig aufrecht erhalten werde. Hierzu ist erforderlich, dafs den Ringen zu Anfang der Bewegung die Impulse $A_1 \omega \cos \varphi \sin \lambda$, $A_2 \omega \sin \varphi$ erteilt werden, wo $A_1$ und $A_2$ die Trägheitsmomente des inneren und äufseren Ringes um einen ihrer Durchmesser bedeuten, und dafs diese Impulse in der Weise abgeändert werden, wie es der Veränderlichkeit der Drehgeschwindigkeiten entspricht. Sie bleiben dabei von der Gröfsenordnung $A_1 \omega$ und $A_2 \omega$. Setzen wir sie mit dem Impuls der Eigenrotation des Schwungringes zusammen, welcher im Wesentlichen $C\Omega$ beträgt, so ergiebt sich ein Gesamtvektor, der nach Richtung und Gröfse jedenfalls nur wenig von dem konstanten Eigenimpuls des Schwungringes abweicht. Der Richtungsunterschied sowie der verhältnismäfsige Gröfsenunterschied beider Vektoren ist nämlich von der Gröfsenordnung $\omega/\Omega$, wenn wir das Verhältnis der Trägheitsmomente $A_1/C$ und $A_2/C$, indem wir ungünstig rechnen, der Gröfsenordnung nach gleich 1 setzen. (Bei der wirklichen Ausführung des Foucaultschen Gyroskops sind diese letzteren Verhältnisse sogar wesentlich kleiner als 1.)

Wir können hiernach sagen: zu der von uns fingierten zwangläufigen Bewegung der Ringmassen, wie sie sich bei Festhaltung der Schwungringaxe ergeben würde, gehört ein Gesamtimpuls, der nach Richtung und Gröfse als konstant angesehen werden darf, sofern wir

Richtungs- und Gröſsenänderungen von der Ordnung $\omega/\dot{\Omega}$ vernachlässigen. Er bleibt also in demselben Sinne und mit demselben Genauigkeitsgrade konstant, wie die Figurenaxe bei Absehung von den Ringmassen ihre Lage im Raume beibehält. In der That war auch die Unveränderlichkeit der Schwungringaxe nur eine angenäherte, wie im Anschluſs an Gl. (2) hervorgehoben wurde, und nur eine bei Vernachlässigung des Gröſsenverhältnisses $\omega/\Omega$ zutreffende.

Wir schlieſsen hieraus, indem wir nunmehr von der bisher betrachteten erzwungenen zu der freien Bewegung des Massensystems: Schwungring, innerer und äuſserer Ring, übergehen, daſs diese Bewegung bei gleicher Wahl des Anfangszustandes mit jener identisch ausfällt, sofern wir nur Unterschiede von der Gröſse $\omega/\Omega$ vernachlässigen. Denn für die freie Bewegung ist zu fordern, daſs bei dieser der Gesamtimpuls des Massensystems nach Richtung und Gröſse im Raum konstant bleibe. Dieser Forderung genügt innerhalb der Genauigkeitsgrenze $\omega/\Omega$ die bisher betrachtete erzwungene Bewegung. Daher stimmt dieselbe innerhalb derselben Genauigkeitsgrenze mit der natürlichen Bewegung des Maſsensystems überein.

Mit anderen Worten: *Der Einfluſs der Massen des Cardanischen Gehänges auf die Bewegung des Foucaultschen Gyroskopes von drei Freiheitsgraden ist nur von der Gröſsenordnung $\omega/\Omega$ und läſst sich in der Beobachtung auf keine Weise nachweisen.* Er darf nicht nur, sondern er muſs konsequenter Weise vernachlässigt werden, wenn anders man überhaupt mit Foucault von der Unveränderlichkeit der Schwungringaxe sprechen will. —

Um Miſsverständnissen entgegenzutreten, wollen wir noch ausdrücklich hervorheben, daſs die bei der Foucaultschen Beobachtungsmethode zu messende Winkeländerung des äuſseren Ringes gegen die Erde (oder die Horizontalkomponente der relativen Bewegung der Schwungringaxe) nicht ihrerseits von der hier vernachlässigten Gröſsenordnung ist. Jene Winkeländerung betrug nämlich $\omega \sin\varphi\, \Delta t$. Ihr Verhältnis gegen Gröſsen von der Ordnung $\omega/\Omega$ ist $\Omega \sin\varphi\, \Delta t$. Hier bedeutet $\Omega\, \Delta t$ den Drehungswinkel des Schwungringes während der Beobachtungszeit, also bei einigermaſsen schneller Rotation und einer beispielsweisen Beobachtungszeit von 8 Minuten, ein auſserordentlich groſses Vielfaches von $2\pi$. Wir erkennen hieraus, daſs der Wert des zu beobachtenden gyroskopischen Effektes durch Vernachlässigungen von der Ordnung $\omega/\Omega$ in keiner Weise getrübt wird. —

Von ungleich gröſserem Einfluſs wie die Massen der Aufhängeringe dürfte die *Reibung* sein. Wir denken dabei teils an die Reibung in der Führungsaxe des äuſseren Ringes, teils an diejenigen Wider-

stände, die sich zwischen den Schneiden des inneren Ringes und ihren Auflagerflächen am äufseren Ringe entwickeln. Die Untersuchung dieser Fehlerquellen, zu denen sich noch Luftwiderstand, Luftströmungen, Erwärmung des Materials etc. gesellen, wäre für das wirkliche Verständnis der Foucaultschen Versuche jedenfalls wichtiger als die pag. 736 erwähnten unnötig allgemeinen und mathematisch ausgesponnenen Betrachtungen über Relativbewegungen.

Den Einflufs der Lagerreibungen können wir uns in vergröfsertem und vergröbertem Mafsstabe durch ein einfaches Experiment klar machen. Wir nehmen einen Kreisel im Cardanischen Gehänge, dessen Schwerpunkt im Mittelpunkt des Gehänges liegt (Fig. 2). Den Schwungring versetzen wir in starke Rotation und stellen seine Axe anfangs horizontal. Darauf drehen wir das Gestell langsam um die Vertikale. Liegen die Verhältnisse günstig, d. h. ist die Reibung in den Lagern gering, die Eigenrotation stark und die Drehung des Gestelles langsam, so behält die Schwungringaxe zunächst ihre ursprüngliche Lage scheinbar bei und hält dadurch auch die Ebene des äufseren Ringes im Raume fest. Dies Ergebnis ist aber nur eine Folge ungenauer Beobachtung. Bei länger anhaltender Drehung des Gestelles oder bei absichtlich vermehrter Lagerreibung sehen wir, dafs sich die Axe des Schwungringes langsam hebt und dabei den inneren Ring schief stellt, während der äufsere scheinbar fortfährt, seine ursprüngliche Lage im Wesentlichen beizubehalten. Drehen wir andrerseits das Gestell um die horizontale Axe des inneren Ringes, so bemerken wir ebenfalls zunächst ein scheinbares Stehenbleiben der Schwungringaxe, wodurch der innere Ring in seiner ursprünglichen Horizontalebene festgehalten wird. Bei länger anhaltender Drehung oder bei vermehrter Reibung sehen wir aber, dafs die Axe des Schwungringes seitlich in der Horizontalebene ausweicht, wobei sie die Ebene des äufseren Ringes um deren Axe verdreht.

Der Grund dieser Bewegungen liegt offenbar in der Reibung. Drehen wir das Gestell um die Vertikale, so bewegen sich die Lager des äufseren Ringes relativ gegen dessen Zapfen, welche durch den Schwungring annähernd festgehalten werden, und es entsteht ein Reibungsmoment um die Drehaxe des *äufseren* Ringes; dieses setzt, wie wir bei dem Versuch sehen, in erster Linie nicht den äufseren, sondern den *inneren* Ring in Bewegung. Drehen wir aber das Gestell um die vorher genannte horizontale Axe, so tritt ein Gleiten der Lager des inneren Ringes gegen dessen Zapfen und im Zusammenhange damit ein Reibungsmoment um die Axe des *inneren* Ringes auf; dasselbe versetzt nicht den inneren, sondern vornehmlich den *äufseren* Ring in Bewegung.

Die Erklärung dieser abermals paradoxen Erscheinungen läſst sich wenigstens qualitativ aus der Theorie des schweren Kreisels entnehmen. Unser im Schwerpunkte unterstützter Schwungring verhält sich unter dem Einfluſs eines Reibungsmomentes um die Drehaxe des *inneren* Ringes mutatis mutandis wie ein schwerer Kreisel. Denn das genannte Reibungsmoment hat, gerade so wie die Schwere beim Nicht-Zusammenfallen von Schwerpunkt und Stützpunkt, die zur Figurenaxe senkrechte horizontale Gerade („Knotenlinie") zur Axe. Die Folge ist eine pseudoreguläre Präcession des Schwungringes, bei welcher die Figurenaxe des Schwungringes in der Horizontalebene ausweicht. Die Ebene des inneren Ringes bleibt dabei im Mittel horizontal, die des *äuſseren* Ringes wird verdreht. Die Überlegung läſst sich entsprechender Weise auch auf die zuerst betrachtete Drehung um die vertikale Drehaxe des *äuſseren* Ringes übertragen und ergiebt dabei eine Präcession des Schwungringes in einer Vertikalebene, also eine Verdrehung des *inneren* Ringes. Übrigens kommen wir auf diesen letzteren Fall im folgenden Kapitel bei dem Geradlaufapparat des Torpedos zurück, woselbst wir eine eingehendere Theorie der fraglichen Erscheinung geben werden.

Auf den Foucaultschen Versuch übertragen sich diese Ergebnisse wie folgt: Was bei uns das Gestell des Kreisels, ist bei Foucault die Erde. Ihre Drehung findet um die Polaraxe statt. Wir zerlegen sie in drei Drehungen um die Lotlinie, d. h. die Drehaxe des äuſseren Ringes, um die ursprünglich horizontale Drehaxe des inneren Ringes und um die Figurenaxe des Schwungringes. Die den beiden ersten Drehkomponenten entsprechenden Reibungswiderstände wirken in der Weise unseres Versuches auf den Schwungring; die eine verdreht den inneren Ring und lenkt dabei die Axe des Schwungringes in vertikalem Sinne ab, die andere verdreht den äuſseren Ring und bewirkt eine Horizontalablenkung der Schwungringaxe. Beide Umstände stören diejenige scheinbare Bewegung, die die im Raum feste Schwungringaxe nach Foucault relativ zur Erde beschreiben soll. Die dritte nach der Figurenaxe genommene Komponente der Erddrehung kommt nicht weiter in Betracht; das entsprechende Reibungsmoment addiert sich zu der von der Eigenrotation herrührenden Reibung der Schwungringaxe in ihren Lagern und ist gegen diese zu vernachlässigen.

*Es sind mithin bei dem Foucaultschen Versuch verschiedene Reibungseinflüsse thätig, welche die absolute Ruhe der Schwungringaxe stören.*

Es entsteht nun die Frage, wie man über diese Reibungseinflüsse Herr werden kann. Das Mittel hierzu liefert abermals eine *hinreichend hohe Eigenrotation des Schwungringes.* (Foucault selbst läſst uns über die Rolle die der Eigenrotation bei seinen Versuchen zufällt, wie schon oben

erwähnt, einigermaſsen im Unklaren.) Mit Rücksicht auf die Anfangsbewegung der Schwungringaxe sahen wir, daſs die Eigenrotation die Aufgabe hat, den von dieser Axe im Allgemeinen beschriebenen *Präcessionskegel hinreichend enge zu machen.* Mit Rücksicht auf die Reibung dagegen müssen wir sagen, die Eigenrotation bezweckt, die zu den verschiedenen Reibungseinflüssen gehörigen *Präcessionsgeschwindigkeiten möglichst langsam zu machen.* Es handelt sich dabei wohlgemerkt jetzt um ganz andere Präcessionsbewegungen wie früher. Bei der durch die Reibung bewirkten Präcessionsbewegung, auf die wir nach Analogie mit dem schweren Kreisel schlossen, beschreibt die Axe des Schwungringes einen in eine Ebene ausgearteten Kegel (oder Fächer) und zwar einen solchen in der Horizontal- oder Vertikalebene, je nachdem wir allein das Reibungsmoment um die Drehaxe des inneren oder allein das um die Drehaxe des äuſseren Ringes betrachten. (In Wirklichkeit werden sich natürlich beide Bewegungen überlagern und es werden auch noch minimale Schwankungen hinzutreten, die in der früher betrachteten Präcessionsbewegung ihren Grund haben.) Da die Präcessionsgeschwindigkeit des schweren Kreisels gleich $P/N$ war, wo $P$ das Moment der Schwere und $N$ den Eigenimpuls des Kreisels bedeutet, [vgl. z. B. p. 305 Gl. (13)], so wird die Geschwindigkeit der durch die Lagerreibung bewirkten Präcession analog gleich $M/N$ werden, wo $M$ das eine oder andere Reibungsmoment, $N$ wiederum den Eigenimpuls bedeutet. Durch Vergröſserung von $N$ kann man jedenfalls diese Präcessionsgeschwindigkeit so klein machen, daſs während einiger Minuten Beobachtungszeit die Kreiselaxe überhaupt noch nicht merklich aus ihrer Anfangslage im Raum abgewichen ist. Jedenfalls sehen wir, daſs, wenn es überhaupt erlaubt ist, von der Reibung abzusehen, dies nur für einen nicht zu langen Zeitraum und dank einem hinreichend groſsen Eigenimpulse gestattet ist. *Wennschon der Eigenimpuls die Wirkung der Reibungsmomente nicht aufheben kann, so kann er doch ev. das Zeitmaſs dieser Wirkung so reduzieren, daſs dieselbe für eine nicht zu lange Beobachtungszeit unwesentlich wird.*

Wie groſs man aber den Eigenimpuls wählen muſs, um dieses zu erreichen, läſst sich theoretisch nicht bestimmen, da es hierbei auf die Gröſse der Reibungsmomente $M$, also auf die Konstruktion der Lager und Schneiden ankommt. Hier hätte die genaue experimentelle Untersuchung der Fehlerquellen einzusetzen, die bei Foucault selbst zu fehlen scheint. Das experimentelle Genie von Foucault bürgt uns dafür, daſs die Reibungswirkungen $M$ bei seinem Apparat sehr klein waren; wie klein sie aber waren, darüber gewinnen wir aus seinen Mitteilungen kein Urteil.

Eine andere Schwierigkeit des ersten Foucaultschen Versuches, nämlich die Notwendigkeit einer sehr genauen Zentrierung des Schwungringes*), wird durch eine glückliche Modifikation des Gyroskops, das sog. *Barogyroskop*, umgangen, von dem unten die Rede sein wird.

Wir gehen zunächst zu dem zweiten Foucaultschen Versuch (Kreisel von zwei Freiheitsgraden) über und haben hier die beiden interessanten Sätze zu beweisen, dafs a) ein in der Horizontalebene beweglicher Schwungring wie eine Deklinationsnadel, b) ein in der Meridianebene beweglicher mutatis mutandis wie eine Inklinationsnadel sich verhält.

Der Beweis beider Sätze ist unmittelbar einleuchtend, wenn wir uns auf den früher entwickelten Begriff des Deviationswiderstandes stützen (vgl. Kap. III § 6); umständliche analytische Entwickelungen, wie sie für diesen Zweck von Gilbert**) gegeben sind, scheinen hier ebensowenig am Platze, wie im vorigen Falle. Die folgenden einfachen Betrachtungen stimmen im Resultat mit den Gilbertschen Entwickelungen überein.

a) *Drehaxe des äufseren Ringes in die Lotlinie gestellt, innerer Ring unter einem rechten Winkel gegen den äufseren festgeklemmt, Schwungringaxe die Horizontalebene bestreichend.* Wir zerlegen die Erdrotation $\omega$ in zwei Komponenten nach der Lotlinie und dem Meridian des Beobachtungsortes. Die erste Komponente beträgt $\omega \sin \varphi$, wenn $\varphi$ die geographische Breite ist. Dieselbe beeinflufst bei hinreichend geringer Reibung in den Zapfen des äufseren Ringes die absolute Lage des Schwungringes nicht; der Schwungring macht diese Drehung einfach nicht mit, wobei er natürlich auch den inneren und äufseren Ring verhindert, dieser Drehung zu folgen, und verhält sich hinsichtlich dieser Komponente ebenso wie der Kreisel von drei Freiheitsgraden hinsichtlich der gesamten Erdrotation. Die andere Komponente ist $\omega \cos \varphi$. Denken wir uns die Lage des Schwungringes in der Horizontalebene für einen Augenblick fixiert, so würde diese Komponente die Axe des Schwungringes auf einem Kreiskegel um den Meridian herumführen und der Kreisel eine reguläre Präcession beschreiben. Vermöge seiner Trägheit widerstrebt er dieser Führung mit einem Momente, dessen Axe gleichzeitig auf der Figurenaxe und der Axe des Präcessionskegels senkrecht steht, in unserem Falle also in die Lotlinie fällt. Die Gröfse des Momentes beträgt nach p. 175 Gl. (1), wenn wir für die dort mit $\nu$ bezeichnete Präcessionsgeschwindigkeit den Wert

---

*) Vgl. die oben cit. Instructions sur les Expériences du gyroscope.

**) Vgl. § XV und XVI der p. 736 citierten Arbeit: Mémoire sur l'application etc.

$\omega \cos \varphi$ eintragen und den Eigenimpuls $N$ des Schwungringes*) in die Formel einführen:

$$(3) \qquad K = -\omega \cos \varphi \sin \vartheta \, (N - A\omega \cos \varphi \cos \vartheta);$$

$\vartheta$ meint hierbei den Winkel zwischen der Figurenaxe des Kreisels und der Axe des Präzessionskegels, d. h. in unserem Falle den Winkel zwischen Figurenaxe und Meridian. Zur Fixierung des Vorzeichens werde festgesetzt, dafs wir $\vartheta$ von der nördlichen Seite des Meridians aus zählen wollen und dafs wir diejenige Seite der Schwungringaxe als (positive) Figurenaxe rechnen, um welche die Eigenrotation in demselben Sinne erfolgt, wie die Erdrotation um die Verbindungslinie Erdmittelpunkt—Nordpol, dafs wir also mit Benutzung der pag. 734 eingeführten Ausdrucksweise die Figurenaxe vom Mittelpunkte des Schwungringes nach dem „Nordpol" desselben gezogen denken. Das Produkt $\omega N$ in Gl. (3) ist auf Grund dieser Festsetzungen eine *positive* Gröfse.

Übrigens ist in (3) das zweite Glied der Klammer gegen das erste unbedingt zu streichen. Jenes Glied verhält sich nämlich zu diesem der Gröfsenordnung nach wie $A\omega$ zu $N$ oder (unter Absehung von der Verschiedenheit des äquatorialen und polaren Trägheitsmomentes) wie die Geschwindigkeit der Erdumdrehung zur Winkelgeschwindigkeit des Schwungringes oder wie die Dauer einer Schwungringumdrehung zur Länge des Tages. Wir schreiben daher statt (3) kürzer:

$$(3') \qquad K = -N\omega \cos \varphi \sin \vartheta.$$

Soll nun die vorausgesetzte Präcessionsbewegung des Schwungringes unter der unveränderlichen Neigung $\vartheta$ gegen den Meridian aufrecht erhalten werden, so müfste ein Moment $-K$ um die Lotlinie ausgeübt werden, welches den Trägheitswiderstand $K$ überwindet. Geschieht dieses nicht, so bewegt sich der Schwungring so, als ob ein Moment $+K$ um die Lotlinie wirkt, welches den Winkel $\vartheta$ verändert. Die Lotlinie ist für den Schwungring eine äquatoriale Hauptaxe, desgleichen für den äufseren Ring, für den inneren Ring dagegen die Figurenaxe desselben. Nennen wir $A_1$, $C_1$, $A_2$, $C_2$ die bez. äquatorialen und polaren Hauptträgheitsmomente des inneren und äufseren Ringes, so wird für die Drehung um die Lotlinie die Summe der in

*) Der Eigenimpuls $N$ drückt sich (vgl. z. B. p. 222 oben) durch die Eulerschen Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ folgendermafsen aus: $N = C(\varphi' + \cos \vartheta \psi')$; die Winkelgeschwindigkeiten $\varphi'$ und $\psi'$ sind aber in Gl. (1) von p. 175 mit $\mu$ und $\nu$ bezeichnet. Es wird daher auch: $N = C(\mu + \cos \vartheta \cdot \nu)$. Selbstverständlich hat der Eulersche Winkel $\varphi$ nichts mit der im Text benutzten geographischen Breite $\varphi$ zu thun.

Frage kommenden Trägheitsmomente von Schwungring, innerem und äufserem Ring $A + C_1 + A_2$. Die Bewegungsgleichung wird mithin:

$$(4) \qquad (A + C_1 + A_2)\,\vartheta'' = K = -N\omega \cos\varphi \sin\vartheta.$$

Dafs gleichzeitig der Eigenimpuls des Schwungringes durch die Erddrehung nicht geändert wird, ist selbstverständlich, weil die Axe von $K$ auf der Figurenaxe senkrecht steht. $N$ ist daher in der vorigen Gleichung eine Konstante, in welchem Umstande wir diejenige zweite Gleichung erblicken können, die zur vollständigen Beschreibung der Bewegung unseres Kreisels von zwei Freiheitsgraden neben (4) erforderlich ist.

Gl. (4) zeigt nun unmittelbar Folgendes: *Im Gleichgewicht befindet sich die Schwungringaxe nur dann, wenn dieselbe die Richtung des Meridianes hat.* Denn wir haben $\vartheta'' = 0$ nur dann, wenn entweder $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ ist. *Von den beiden Gleichgewichtslagen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ist die erstere eine stabile, die letztere eine labile.* Denn vermöge des Vorzeichens der rechten Seite von (4) wird bei einer Störung der Gleichgewichtslage $\vartheta = 0$ die Schwungringaxe durch die auftretende Winkelbeschleunigung nach dieser Lage zurückgeführt, dagegen bei einer Störung der Gleichgewichtslage $\vartheta = \pi$ von dieser entfernt. *In der stabilen Gleichgewichtslage befindet sich die Eigenrotation des Schwungringes mit der meridionalen Komponente der Erdrotation im gleichsinnigen Parallelismus.* Denn wir wollten, um das Vorzeichen von $\omega N$ positiv zu machen, den Winkel $\vartheta$ zwischen Meridian und Figurenaxe so bestimmen, dafs die Eigenrotation um die Figurenaxe in demselben Sinne erfolgt, wie die Erddrehung um die Erdaxe oder wie die meridionale Komponente derselben um die nördliche Hälfte des Meridians, von der aus wir den Winkel $\vartheta$ zählen. *Die von Foucault hervorgehobene Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus der Drehaxen zeigt sich in dem Auftreten der nach der stabilen Gleichgewichtslage hin gerichteten Beschleunigung der Schwungringaxe.*

Am einfachsten und vollständigsten läfst sich die in Rede stehende Bewegung beschreiben, wenn wir sie mit der Bewegung eines mathematischen Pendels vergleichen. In der That ist (4) nichts anderes, als die gewöhnliche Differentialgleichung der Pendelbewegung. Die letztere können wir, wenn wir unter $l$ die Länge des Pendels und unter $\vartheta$ denjenigen Winkel verstehen, den $l$ mit der stabilen Gleichgewichtslage, d. h. mit der Schwererichtung jeweils einschliefst, schreiben:

$$(4') \qquad \vartheta'' = -\frac{g}{l} \sin\vartheta.$$

Um die Gl. (4) und (4') in einander überzuführen, ist es nur nötig, $l$ so zu wählen, dafs

$$l = \frac{g(A + C_1 + A_2)}{N\omega \cos\varphi}. \tag{5}$$

*Diese Formel giebt die Länge des korrespondierenden mathematischen Pendels an, dessen Bewegung bei gleichen Anfangswerten von $\vartheta$ und $\vartheta'$ mit der Bewegung unseres Schwungringes genau identisch ist.* Länge und Schwingungsdauer des Pendels wird um so kleiner, je gröfser $N$ ist; dementsprechend nimmt die Richtkraft der Erddrehung auf unseren Schwungring mit der Gröfse des Eigenimpulses $N$ zu.

Auch der Vergleich mit der Deklinationsnadel läfst sich jetzt aufs einfachste durchführen. Da nämlich die Bewegungsgleichung einer solchen lautet $J\vartheta'' = -MH \sin\vartheta$, wo $J$ das Trägheitsmoment der Nadel, $M$ das magnetische Moment derselben und $H$ die Horizontalintensität des Erdmagnetismus bedeutet, so wird die Länge des dieser Magnetnadel korrespondierenden mathematischen Pendels

$$l = \frac{gJ}{MH}. \tag{5'}$$

Indem man die in (5) und (5') angegebenen Pendellängen gleichsetzt, erkennt man, wie sich die von Foucault ausgesprochene Zuordnung des rotierenden Schwungringes mit der Magnetnadel auch quantitativ durchführen läfst. Stellt man sich z. B. vor, dafs das Trägheitsmoment $J$ der Nadel mit dem für die Bewegung des Schwungringes in Betracht kommenden gesamten Trägheitsmoment $A + C_1 + A_2$ der Kreiselvorrichtung übereinstimmt, so hätte man den Eigenimpuls des Schwungringes einfach so zu wählen, dafs $N\omega \cos\varphi = MH$ ist; *alsdann wird die Bewegung unseres Schwungringes vom Eigenimpuls $N$ bei gleichen Anfangswerten von $\vartheta$ und $\vartheta'$ ein kongruentes Abbild der Bewegung einer Magnetnadel vom magnetischen Momente $M$.*

b) *Drehaxe des äufseren Ringes senkrecht gegen die Meridianebene gerichtet, innerer Ring senkrecht gegen den äufseren festgestellt, Schwungringaxe in der Meridianebene beweglich.*

Von einer Zerlegung der Erdrotation in Komponenten haben wir hier abzusehen, weil die Gesamtrotation $\omega$ die Lage des Schwungringes in der Meridianebene beeinflufst. Denken wir uns den Winkel $\vartheta$ zwischen der Axe des Schwungringes und der Axe der Erdrotation für einen Augenblick festgehalten, so würde der Schwungring eine reguläre Präcession um die Erdaxe beschreiben. Dem widerstrebt er vermöge seiner Trägheit mit einem Momente $K$, dessen Axe gleichzeitig auf der Axe des Schwungringes und der der Erdrotation senkrecht steht, also in die Normale zur Meridianebene, d. h. in die Drehaxe des äufseren Ringes fällt. Die Gröfse des Momentes beträgt nach p. 175 Gl. (1),

wenn wir nunmehr $\omega$ statt $\nu$ und $N$ statt $C(\mu + \nu \cos \vartheta)$ eintragen,

$$K = -\omega \sin \vartheta (N - A\omega \cos \vartheta). \tag{6}$$

Ebenso wie unter a) haben wir das zweite Glied der Klammer gegen das erste zu vernachlässigen, so daſs einfacher wird:

$$K = -N\omega \sin \vartheta. \tag{6'}$$

Setzen wir ähnlich wie unter a) fest, daſs wir die Figurenaxe vom Mittelpunkte des Schwungringes nach derjenigen Seite hin ziehen, von der aus gesehen die Rotation des Schwungringes in demselben Sinne erfolgt wie die Erdrotation um den Nordpol, und messen wir den Winkel $\vartheta$ von der nördlichen Hälfte der Erdaxe nach der so definierten Figurenaxe hin, so wird das Produkt $N\omega$ in der vorigen Gleichung positiv sein.

Soll also der Schwungring in der sich drehenden Meridianebene seine Lage beibehalten, so ist dazu ein Moment $-K$ um die Drehaxe des äuſseren Ringes erforderlich, welches die Trägheitswirkung des Schwungringes überwindet. Wird ein solches Moment nicht ausgeübt, so muſs sich der Winkel $\vartheta$ zwischen Erdaxe und Figurenaxe ändern, in solchem Maſse, das das Produkt aus dem Trägheitsmoment der bewegten Teile und der Winkelbeschleunigung gleich $K$ wird. Dies führt ebenso wie oben auf die Differentialgleichung:

$$(A + C_1 + A_2)\vartheta'' = K = -N\omega \sin \vartheta. \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar die folgenden Schlüsse: *Der Schwungring befindet sich innerhalb der Meridianebene nur dann im Gleichgewicht, wenn er die Richtung der Erdaxe hat, d. h. nur in den beiden Lagen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$. Die erstere Lage ist eine stabile die letztere eine labile Gleichgewichtslage. Indem die durch* (7) *bestimmte Beschleunigung den Schwungring nach der stabilen Gleichgewichtslage hinführt, ist sie bestrebt, die Drehaxe des Schwungringes mit der Drehaxe der Erde in homologem Sinne parallel zu richten.*

Auch die jetzige Bewegung ist kongruent mit der Bewegung eines einfachen Pendels. *Die korrespondierende Pendellänge beträgt nunmehr*

$$l = \frac{g(A + C_1 + A_2)}{N\omega}. \tag{8}$$

Andrerseits läſst sich auch die Bewegung der Inklinationsnadel mit der Pendelbewegung identifizieren. Bedeutet $J$ und $M$ Trägheitsmoment und magnetisches Moment der Nadel, $T$ die Totalintensität des Erd-

magnetismus, so wird die Länge des dieser Inklinationsnadel entsprechenden Pendels:

$$l = \frac{gJ}{MT}. \tag{8'}$$

*Aus dem Vergleich von* (8) *und* (8') *erkennt man, wie sich das Verhalten unserer in der Meridianebene beweglichen Schwungringaxe dem Verhalten der Magnetnadel im Inklinationskompaſs quantitativ zuordnen läſst*, wobei indessen der pag. 735 hervorgehobene Unterschied beider Bewegungen im Auge zu behalten ist.

c) Die vorangehenden Resultate lassen sich leicht zusammenfassen und verallgemeinern, wenn man annimmt, daſs die Axe des Schwungringes in einer *gegen die Erde beliebig gelegenen Ebene E* beweglich sei. Man kann, um dieses zu erreichen, die Ebene des inneren Ringes wieder senkrecht gegen die des äuſseren feststellen und hat dann nur die Drehaxe des äuſseren Ringes relativ gegen die Erde so zu lagern, daſs dieselbe senkrecht auf der Ebene $E$ steht. Bedeutet $\lambda$ den Winkel zwischen der Axe der Erdrotation und der Ebene $E$, so kommt als wirksame Komponente der Erdrotation $\omega \cos \lambda$ in Betracht und es ergiebt sich als Länge des korrespondierenden einfachen Pendels:

$$l = \frac{g(A + C_1 + A_1)}{\omega N \cos \lambda}. \tag{9}$$

Diese Formel geht in den Fällen a) und b), wo im Besonderen $\lambda = \varphi$ bez. $\lambda = 0$ wird, in die Gl. (5) und (8) über; sie rührt von Gilbert her*).

Noch mögen zwei Bemerkungen hinzugefügt werden über den Einfluſs der Reibung und der Massen des Aufhängesystems; diese Bemerkungen sollen sich gleichmäſsig auf die Fälle a) und b), sowie auf den verallgemeinerten Fall c) beziehen.

Die Reibung in den Lagern des äuſseren Ringes wird sich natürlich auch bei dem Gyroskop von zwei Freiheitsgraden bemerklich machen. Während die Schwingungsamplitude der Schwungringaxe bei Vernachlässigung der Reibung konstant bleiben müſste, wie die obige Betrachtung zeigt, wird sie durch die Reibung allmählich gedämpft. Die Schwungringaxe wird sich also mit abnehmender Amplitude der Schwingungen immer mehr der stabilen Gleichgewichtslage nähern und sich schlieſslich in diese einstellen, wenn die Eigenrotation des Schwung-

*) Gl. (130) in der früher cit. Arbeit: Mémoire sur l'application etc. Wir sind im Texte nur darin von Gilbert abgewichen, daſs wir beim Übergange von (3) zu (3') und von (6) zu (6') ein Glied mit dem Faktor $\omega^2$ unterdrückt haben, welches mit Rücksicht auf den Genauigkeitsgrad des ganzen theoretischen Ansatzes keine Bedeutung hat.

ringes hinreichend lange anhält. Hinsichtlich der quantitativen Verhältnisse dürfen wir uns dabei einfach auf die Analogie mit dem einfachen Pendel oder mit der Magnetnadel berufen. Bei ähnlicher Konstruktion der Lager wird die Reibungswirkung bei den in Rede stehenden Versuchen eine ähnliche sein, wie bei dem einfachen Pendel und bei den Schwingungen einer Magnetnadel, die ihrerseits natürlich stets gedämpfte Schwingungen sind.

Was die Massenwirkung des äufseren und inneren Ringes betrifft, so könnte es auffallen, dafs wir dieselbe in unseren letzten Formeln zum Ausdruck gebracht haben, während wir bei der Besprechung des ersten Foucaultschen Versuches sagten, dafs sie zu vernachlässigen sei. Dies erklärt sich daraus, dafs im ersten Foucaultschen Versuche (bei Vernachlässigung der Reibung) die Schwungringaxe im Raume merklich feststeht und die Ringmassen nur Drehgeschwindigkeiten von der Ordnung der Erdrotation ausführen, dafs dagegen im zweiten Foucaultschen Versuch die Schwungringaxe wirkliche Beschleunigungen erfährt, an denen die zu einem Ganzen verbundenen Mafsen des äufseren und inneren Ringes teilnehmen. Während im ersten Foucaultschen Versuche der Einflufs der Ringmassen auf die zu beobachtende Gröfse der relativen Bewegung des Schwungringes verschwindend klein war (von der Ordnung $\omega/\Omega$ vgl. p. 742), wird er im zweiten Foucaultschen Versuch von derselben Gröfsenordnung wie die zu beobachtenden Bewegungen der Schwungringaxe selbst, so dafs sich z. B. in der Formel (9) das Trägheitsmoment der Ringe $C_1$, $A_2$ zu dem des Schwungringes $A$ direkt hinzuaddiert. —

Es bleibt uns schliefslich noch übrig, von einer zweckmäfsigen Abänderung des Foucaultschen Gyroskops, dem schon genannten *Barogyroskop* von Gilbert zu sprechen. Wie der Name besagt, kommt bei diesem Apparat aufser der Erdrotation auch die Schwere ins Spiel. Wir schildern die Einrichtung desselben an Hand der Abbildung*) 111, indem wir den Vergleich mit dem Foucaultschen Gyroskop ziehen.

In der Figur sieht man zunächst den Schwungring $D$ mit seiner Axe $a$, auf welcher sich bei $E$ ein Zahnrad zum Anlassen desselben befindet, sowie in der Verlängerung der Axe nach unten hin ein Laufgewicht $p$. Als inneren Ring können wir hier den Rahmen $C$ bezeichnen, welcher bei $A$ und $A'$ auf Schneiden ruht. Den Bügel $S$ können wir mit dem äufseren Ringe bei Foucault vergleichen. Er läfst sich in der Hülse $H$ verdrehen und auf diese Weise in ein be-

*) Dieselbe ist dem „Katalog mathem. Modelle, Apparate und Instrumente", im Auftrage der deutschen Mathem.-Vereinig. herausgegeben von W. Dyck, Nachtrag p. 79 entnommen.

liebiges Azimuth einstellen; bei jedem einzelnen Versuche ist er aber fest, da die Reibung in der Hülse jede selbstthätige Drehung des Bügels hindert.

Man justiert den Apparat so, dafs die Axe $AA'$ genau horizontal unter einem beliebigen Azimuth gegen den Meridian steht, und bringt zunächst durch zweckmäfsiges Verstellen der Schrauben $vv'$ und der Zusatzmassen $uu'$ den Schwerpunkt von Schwungring und Rahmen in

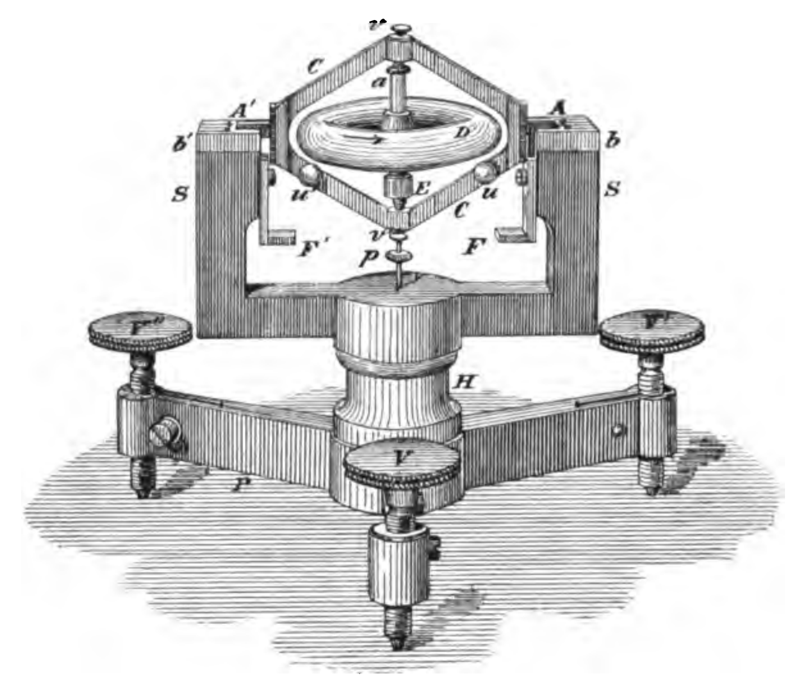



Fig. 111.

die Verbindungslinie der Schneiden $AA'$, so dafs sich der bewegliche Teil des Apparates im neutralen Gleichgewicht befindet. Dann bringt man das Laufgewicht $p$ auf die am unteren Ende des Rahmens befestigte Nadel und verwandelt dadurch die Neutralität des Gleichgewichts in eine (geringe) Stabilität.

Nachdem der Schwungring einen grofsen Eigenimpuls $N$ bekommen hat (bei Gilbert 150 Umdrehungen in der Sekunde), beobachtet man, dafs sich seine Axe oscillatorisch von der Vertikalen entfernt und nachdem die Oscillationen abgestorben sind, unter einer gewissen Neigung, welche unter anderem von dem Azimuth der Aufstellung abhängt, verharrt.

Die Berechnung dieser Neigung und die Theorie des Versuches wird wieder äufserst einfach, wenn man an den Begriff des Deviationswiderstandes anknüpft.

Qualitativ können wir folgendermaſsen sagen: Der in einer beliebigen Vertikalebene bewegliche Schwungring befindet sich unter ganz ähnlichen Bedingungen wie der Schwungring im zweiten Foucaultschen Versuch (s. oben unter b) oder c)); um seine Lage innerhalb der Vertikalebene oder seine Stellung gegen die rotierende Erde festzuhalten, wäre die Überwindung des Momentes $K$ erforderlich, welches die Verbindungslinie der Schneiden $AA'$ zur Axe hat. Da ein Gegenmoment $-K$ nicht ausgeübt wird, bewegt sich der Schwungring so, als ob ein Moment $K$ um die genannte Axe auf ihn einwirkt. Dieses strebt die Figurenaxe des Schwungringes der Drehaxe der Erde parallel zu stellen; es lenkt also die Schwungringaxe aus ihrer vertikalen Anfangslage nach derjenigen Richtung hin ab, in welche sich die Axe der Erdrotation auf die Bewegungsebene des Schwungringes projiziert. Auſser diesem Momente wirkt aber jetzt das Moment der Schwere, welches die Figurenaxe des Schwungringes nach der Vertikalen zurücklenkt. Es wird mithin eine gewisse mittlere Lage zwischen der Vertikalen und der Projektion der Erdaxe geben, in welcher sich beide Drehmomente das Gleichgewicht halten und in welcher sich die Axe des Schwungringes demnach in Ruhe befindet.

Um die Überlegung nach der quantitativen Seite zu vervollständigen, ist es nur nötig, das Moment der Schwere $M$ einerseits und das der Trägheitswirkung $K$ andrerseits durch die an dem Apparat zu beobachtenden Gröſsen auszudrücken.

Es sei $m$ die Masse des Laufgewichtes $p$ und $\delta$ sein Abstand vom Schwerpunkt des Schwungringes. Bedeutet $\chi$ den Winkel, den die Figurenaxe des Schwungringes mit der Vertikalen bildet, von der Vertikalen nach der Figurenaxe hin positiv gerechnet, so wird der Hebelarm der Schwerkraft $mg$ um die Axe der Schneiden $\delta \sin \chi$ und daher das Moment der Schwere im Sinne des Winkels $\chi$

$$M = -mg\delta \sin \chi. \tag{10}$$

Bei der Bestimmung des Deviationswiderstandes $K$ gehen wir wieder von der Gl. (1) p. 175 aus, führen darin den Eigenimpuls $N$ des Schwungringes ein und setzen für $\nu$ die Komponente der Erdrotation nach der Bewegungsebene des Schwungringes $\nu = \omega \cos \lambda$, wo $\lambda$ wie unter c) den Winkel zwischen der Erdaxe und dieser Ebene bedeutet. Wir erhalten so, wenn wir noch ein Glied von der verhältnismäſsigen Gröſsenordnung $A\omega/N$ wie oben streichen:

$$K = -N\omega \cos \lambda \sin \vartheta.$$

$\vartheta$ miſst hierbei den Winkel zwischen der Projektion der Erdaxe auf die Bewegungsebene des Schwungringes und der Figurenaxe des letzteren,

von jener nach dieser hin positiv gerechnet. In dem gleichen Sinne wie $\vartheta$ wird das Moment $K$ gerechnet. Führen wir noch den Winkel $\mu$ ein, den die Projektion der Erdaxe auf die Bewegungsebene mit der Vertikalen bildet, ebenfalls von jener nach dieser hin positiv gerechnet, so haben wir $\vartheta = \mu + \chi$ und können schreiben:

$$K = -N\omega\,(\cos\chi\cos\lambda\sin\mu + \sin\chi\cos\lambda\cos\mu). \tag{11}$$

Hier sind die Produkte $\cos\lambda\sin\mu$ und $\cos\lambda\cos\mu$ durch Gröfsen auszudrücken, die der Messung direkter zugänglich sind als die Winkel $\lambda$ und $\mu$. Wir wählen als solche die geographische Breite $\varphi$ des Beobachtungsortes und den Winkel $\alpha$ ($< 180^0$), den die Bewegungsebene der Figurenaxe mit dem Meridian des Beobachtungsortes bildet. Auf der um den Mittelpunkt des Schwungringes beschriebenen Einheitskugel markieren wir uns (vgl. Fig. 112) ihren Schnittpunkt $V$ mit der Vertikalen, ihren Schnittpunkt $P$ mit der Parallelen zur Erdaxe und endlich den Punkt $Q$, der der Projektion der Erdaxe auf die Bewegungsebene des Schwungringes entspricht. Das

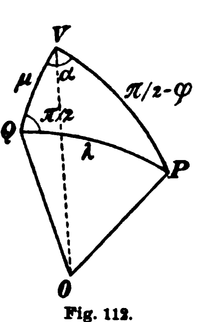


Fig. 112.

entstehende sphärische Dreieck $PQV$ ist bei $Q$ rechtwinklig. Seine Hypotenuse beträgt $\pi/2 - \varphi$, seine Katheten sind $\lambda$ und $\mu$. Der Winkel bei $V$ ist gleich $\alpha$. Nach der Neperschen Regel gelten die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \cos\lambda\cos\mu, \\ \cos\alpha &= \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\mu, \end{aligned} \tag{12}$$

aus welchen durch Multiplikation folgt

$$\cos\alpha\cos\varphi = \cos\lambda\sin\mu. \tag{12'}$$

Setzen wir die in (12) und (12') bestimmten Werte von $\cos\lambda\cos\mu$ und $\cos\lambda\sin\mu$ in (11) ein, so ergiebt sich

$$K = -N\omega\,(\sin\chi\sin\varphi + \cos\chi\cos\varphi\cos\alpha). \tag{13}$$

Wir können nun sowohl die Gleichgewichtslage wie das Bewegungsgesetz der Schwungringaxe in einfachster Weise bestimmen.

Im *Gleichgewicht* befindet sich die Axe des Schwungringes, wenn die beiden Momente $M$ und $K$ einander aufheben. Zur Bestimmung der Gleichgewichtslage dient daher die Gleichung $M = K$. Bezeichnen wir mit $\chi_0$ denjenigen Wert von $\chi$, welcher der Gleichgewichtslage entspricht, so haben wir nach (10) und (13) zur Bestimmung von $\chi_0$ die Gleichung:

$$mg\delta\sin\chi_0 = N\omega\,(\sin\chi_0\sin\varphi + \cos\chi_0\cos\varphi\cos\alpha)$$

oder

$$\operatorname{tg}\chi_0 = \frac{N\omega\cos\varphi}{mg\delta - N\omega\sin\varphi}\cos\alpha. \tag{14}$$

Allgemeiner finden wir die *Bewegungsgleichung* der Schwungringaxe, wenn wir das Produkt aus dem Trägheitsmoment der bewegten Teile in die Beschleunigung des Winkels $\vartheta$ oder, was dasselbe bedeutet, des Winkels $\chi$ gleich der Differenz der wirkenden Momente setzen. Ist $A$ das äquatoriale Trägheitsmoment des Schwungringes und $A_1$ das Trägheitsmoment des Rahmens um die Verbindungslinie der Schneiden, so kommt bei der Änderung des Winkels $\chi$ die Summe $A + A_1 + m\delta^2$ in Betracht. Die Bewegungsgleichung wird hiernach

$$(A + A_1 + m\delta^2)\,\chi'' = K - M$$

oder nach (10) und (13)

$$(A + A_1 + m\delta^2)\,\chi'' = -(N\omega \sin\varphi - mg\delta)\sin\chi - N\omega\cos\varphi\cos\alpha\cos\chi.$$

Wir schreiben hierfür bequemer, indem wir die Definition von $\chi_0$ berücksichtigen:

$$(15)\quad (A+A_1+m\delta^2)\chi'' = -\sqrt{(N\omega\sin\varphi - mg\delta)^2 + (N\omega\cos\varphi\cos\alpha)^2}\,\sin(\chi-\chi_0).$$

Auch diese Gleichung läfst sich ersichtlich mit der Bewegungsgleichung eines gewöhnlichen Pendels in Parallele setzen (s. oben Gl. (4')). Die korrespondierende Pendellänge wird nach Analogie von Gl. (5)

$$l = \frac{g(A + A_1 + m\delta^2)}{\sqrt{(N\omega\sin\varphi - m'g\delta)^2 + (N\omega\cos\varphi\cos\alpha)^2}}.$$

Die Axe des Barogyroskops oscilliert also um die Gleichgewichtslage $\chi_0$ mit derjenigen Schwingungsdauer, welche der soeben definierten Pendellänge $l$ entspricht. Mit Rücksicht auf die Reibung an den Schneiden werden die Oscillationen allmählich absterben, und wird die schliefsliche Ruhelage mit der Gleichgewichtslage $\chi_0$ zusammenfallen.

Die Formeln (14) und (15) legt Gilbert der Berechnung und Dimensionierung seines Apparates zu Grunde. Die Gilbertsche Ableitung*) dieser Formeln ist wieder wesentlich komplicierter wie die hier gegebene. Wir diskutieren das Resultat in naheliegender Weise.

Nach Gl. (14) hängt die Neigung $\chi_0$ von dem Azimuth der Aufstellung ab und wird z. B. gleich Null, wenn $\alpha = \pi/2$ ist, d. h. wenn die Verbindungslinie der Schneiden $AA'$ in dem Meridian liegt. Letzteres folgt unmittelbar auch daraus, dafs bei dieser Stellung des Apparates die Projektion der Erdaxe auf die Bewegungsebene der Schwungringaxe mit der Vertikalen zusammenfällt, dafs also in diesem Falle beide Momente $M$ und $K$ die Schwungringaxe gleicherweise in die Vertikale einzustellen bestrebt sind. Umgekehrt wird man, um eine möglichst

*) Vgl. die mehrfach cit. Arbeit: Mémoire sur l'application, § XVIII, Gl. (153). Die Resultate sind zusammengestellt in dem ebenfalls cit. Katalog mathem. Modelle etc. Nachtrag p. 78.

deutliche Ablenkung $\chi_0$ zu erhalten, die Verbindungslinie der Schneiden senkrecht gegen den Meridian richten, die Bewegungsebene der Schwungringaxe also mit der Meridianebene zusammenfallen lassen. Innerhalb dieser Ebene wird die am unteren Ende des Schwungringes befestigte Nadel nach Süden oder nach Norden abweichen, je nachdem dieses Ende nach der Ausdrucksweise von p. 734 ein Südpol oder ein Nordpol ist, d. h. je nachdem die Umdrehung des Schwungringes um die Nadel in dem entgegengesetzten oder in demselben Sinne erfolgt, wie die Erdrotation um den Nordpol der Erde.

Im Übrigen zeigt Gl. (14), daſs die Stärke des Ausschlages nur von dem Verhältnis $mg\delta/N\omega$ abhängt, und daſs man den stärksten Ausschlag, nämlich einen vollen rechten Winkel, erhalten würde, wenn man dieses Verhältnis gerade gleich $\sin\varphi$ wählt. Andrerseits lehrt aber Gl. (15), daſs diese Wahl praktisch nicht die vorteilhafteste ist, (ganz abgesehen davon, daſs die Auflagerung des Rahmens auf den Schneiden einen so groſsen Ausschlag unmöglich machen würde). Die Länge des korrespondierenden mathematischen Pendels würde dann nämlich

$$l = \frac{g\,(A + A_1 + m\delta^2)}{N\omega \cos\varphi \cos\alpha}$$

und die zugehörige halbe Schwingungsdauer für hinreichend kleine Schwankungen um die Gleichgewichtslage

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{A + A_1 + m\delta^2}{N\omega \cos\varphi \cos\alpha}}$$

betragen. Zum Zwecke eines ungefähren Überschlages möge der für die Gröſse des Ausschlags günstigste Fall $\cos\alpha = 1$, $\cos\varphi = 1$ (Beobachtung im Meridian unter dem Äquator) vorausgesetzt werden; ferner möge das Trägheitsmoment $C$ des Schwungringes, welches etwa doppelt so groſs ist, wie das äquatoriale Trägheitsmoment $A$ desselben, beispielsweise gleich $A + A_1 + m\delta^2$ angenommen werden. Bezeichnet $n$ die Umdrehungszahl des Schwungringes in der Sekunde, so hat man $N = 2\pi Cn$ und

$$l = \frac{g}{2\pi n\omega}, \quad \tau = \pi \sqrt{\frac{1}{2\pi n\omega}}.$$

Bei Gilbert ist (s. oben) $n = 150$; der Wert von $\omega$ beträgt in Sekunden $2\pi/24 \cdot 60 \cdot 60$; mithin wird $2\pi n\omega$ ungefähr gleich $10/144$ und

$$l = 144 \text{ m}, \quad \tau = 12 \text{ sec.}$$

Diese Schwingungsdauer ist unerwünscht lang, da die Beobachtung auf die ersten Minuten nach Ingangsetzen des Schwungringes beschränkt werden muſs und da man bereits in dieser Zeit ein Urteil über die

definitive Gleichgewichtslage des Schwungringes gewinnen will. Auch würden die starken Schwankungen der Schwungringaxe (in dem vorausgesetzten Falle beträgt die Amplitude der Schwankung einen rechten Winkel) für die Beobachtung der mittleren Gleichgewichtslage unbequem sein. Es kommt hinzu, dafs unser Wert von $\tau$ nur für hinreichend kleine Schwingungsamplituden gilt, dafs dagegen bei den in unserem Beispiel in Betracht kommenden bedeutenden Amplituden die Schwingungsdauer entsprechend länger ausfallen würde. Immerhin zeigt unsere Rechnung, dafs man die Stärke der Ablenkung aus der Vertikalen durch geeignete Wahl der Umstände beliebig steigern und je nach Bedarf regulieren kann.

Gilbert selbst rechnet folgendes Zahlenbeispiel: $\varphi = 48^0\,50'\,39''$, $\alpha = 0^0$, $n = 200$, $m = 0{,}79$ gr, $\delta = 5$ cm; mit Rücksicht auf die Abmessungen von Schwungring und Rahmen ergiebt sich

$$\chi_0 = 7^0\,37'\,10'', \quad \tau = 3{,}76 \text{ Sek.}$$

Hierbei ist also auf einen sehr grofsen Wert der Ablenkung verzichtet worden zu Gunsten einer Verkleinerung der Schwingungsdauer und der damit zusammenhängenden bequemeren Beobachtung der schliefslichen Gleichgewichtslage.

Die Gilbertsche Anordnung scheint gegenüber der ursprünglichen Foucaultschen manche Vorzüge zu haben. In dem Laufgewichte $p$ und seinem Abstande $\delta$ vom Schwerpunkt des Schwungringes hat man gewissermafsen einen Parameter zur Verfügung, den man in einer für die Beobachtung günstigen Weise wählen kann. Indem man die Verhältnisse so einrichtet, dafs die schliefsliche Gleichgewichtslage in der Nähe der Vertikalen liegt, eliminiert man manche Beobachtungsfehler, die bei grofsen Ausschlägen auftreten würden. Ferner werden die unvermeidlichen Fehler bei der Centrierung der bewegten Massen, die für das Foucaultsche Gyroskop sehr störend sein dürften, durch die absichtliche Hinzufügung des Übergewichtes $p$ für das Barogyroskop relativ belanglos. Über die quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung macht indefs Gilbert ebenso wie seinerzeit Foucault in der mehrfach genannten Abhandlung keine näheren Angaben.

Absichtlich haben wir in der vorangehenden Darstellung die wahrscheinlichen Fehlerquellen und die Frage nach einer möglichen quantitativen Bestätigung stärker betont, als dies in den Lehrbüchern der Mechanik sonst üblich ist. Scheint doch das vorliegende Beispiel vorzüglich geeignet, zu zeigen, wie weit der Weg ist, der sich zwischen der gedanklichen Erfassung eines dynamischen Vorganges und seiner Realisierung durch bestimmte physikalische Apparate dehnt!

Foucault hatte in geistvoller Weise, mehr durch Intuition als durch zwingende mechanische Schlüsse, das Verhalten des rotierenden Schwungringes an der Erdoberfläche vorhergesagt. Um von da aus sein Gyroskop fertig zu stellen, war eine angestrengte Arbeit von acht Monaten nötig. Trotz der aufgewandten Mühe und trotz der ungewöhnlichen experimentellen Begabung Foucaults dürfte der Apparat nur gerade an derjenigen Grenze stehen, bei welcher sich die nachzuweisende mechanische Wahrheit aus den Störungen und Beobachtungsfehlern eben herauszuheben beginnt. Wie mifstrauisch Foucault selbst gegen die Angaben seines Apparates sein zu müssen glaubte, geht aus einer Bemerkung in den oben cit. „Instructions“ hervor: Man dürfe nicht eher überzeugt sein, dafs die beobachtete Ablenkung des Gyroskops wirklich in der Erddrehung ihren Grund habe, bevor man nicht bei entgegengesetztem Umdrehungssinn des Schwungringes denselben Sinn der Ablenkung erhalten habe. Es scheint hiernach, dafs nicht einmal der Sinn der Ablenkung über allen Zweifel erhaben war; dafs die Gröfse derselben sich mit einiger Genauigkeit richtig ergiebt, scheint umso zweifelhafter, besonders wenn der Versuch von einem weniger gewiegten Experimentator als Foucault gemacht wird.

Günstiger dürften aus den oben genannten Gründen (Fortfall der Notwendigkeit einer besonders genauen Centrierung, Auswahl bequemer Versuchsbedingungen durch geeignete Bestimmung des Übergewichtes) die Chancen bei dem Barogyroskop stehen. Indessen wäre auch hier noch der wirkliche experimentelle Nachweis erforderlich, dafs die Fehlerquellen die Gröfse der zu beobachtenden Ablenkung nicht zu sehr entstellen, ein Nachweis, den wir bei Gilbert vergeblich suchen.

Bei einer Wiederholung der Foucault'schen oder Gilbert'schen Versuche würde man wohl jedenfalls elektromagnetischen Antrieb des Schwungringes einführen und dadurch die Mifslichkeiten ausschalten, die aus der allmählichen Verlangsamung der Eigenrotation hervorgehen.

---





